

บทที่ 3

เรขาคณิตวิเคราะห์

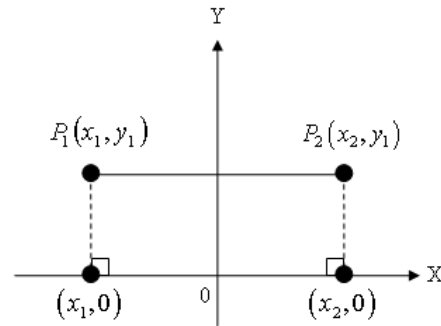
3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

กำหนดให้ $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ

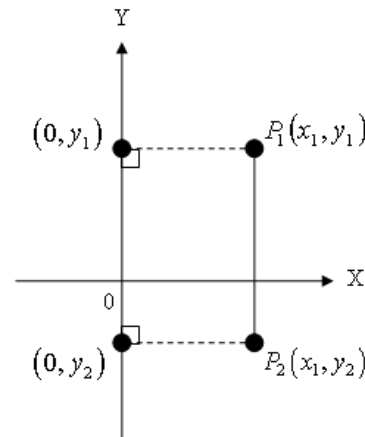
1) กรณีที่ P_1 และ P_2 อยู่บนแกน X หรืออยู่บนส่วนเส้นตรงที่ขนานกับแกน X

$$P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |x_1 - x_2|$$



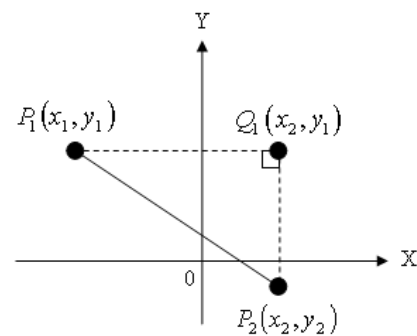
2) กรณีที่ P_1 และ P_2 อยู่บนแกน Y หรืออยู่บนส่วนเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y

$$P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |y_1 - y_2|$$



3) กรณีที่ P_1 และ P_2 อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$



ทฤษฎีบท 1 ถ้า $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ เป็นจุดในระนาบ

ระยะทางระหว่าง P_1 และ P_2 เท่ากับ $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ หน่วย

แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

1) $(0,0)$ และ $(4,0)$

2) $(-2,3)$ และ $(3,3)$

3) $(0,-3)$ และ $(0,0)$

4) $(-1,-2)$ และ $(-1,2)$

5) $(4,5\sqrt{2})$ และ $(4,2\sqrt{2})$

6) $(0,0)$ และ $(3,4)$

7) $(-2,1)$ และ $(10,8)$

8) $(-1,-3)$ และ $(5,5)$

9) $(-2,-2)$ และ $(-1,1)$

10) $(2\sqrt{3},-\sqrt{6})$ และ $(\sqrt{3},0)$

2. สามเหลี่ยมที่กำหนดจุดยอดให้ต่อไปนี้เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

1) $A(1,3)$, $B(-4,3)$ และ $C(1,-2)$

2) $A(-5,-1)$, $B(2,3)$ และ $C(3,-2)$

3) $A(2,2)$, $B(-2,-2)$ และ $C(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

3. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด $(5,0)$, $(-6,0)$ และ $(-4,4)$ เป็นจุดยอด จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 3)$ และผ่านจุด $(8, -5)$

- 1) จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้ 2) จุด $(-6, 9)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมนี้หรือไม่

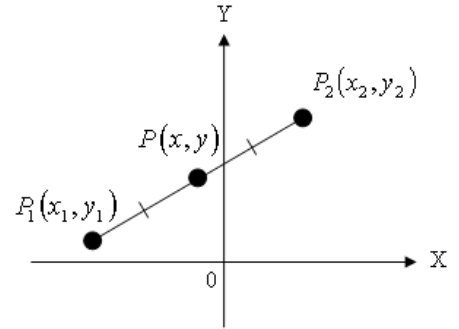
5. จุด $(0, -1)$, $(2, 3)$ และ $(5, 9)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

6. จงหาจุดบนแกน Y ที่อยู่ห่างจากจุด $(-4, 4)$ และ $(4, 10)$ เป็นระยะทางเท่ากัน

7. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(1, 0)$ และมีรัศมียาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาความยาวของคอร์ดของวงกลมนี้ ซึ่งมีจุด $(2, 2)$ เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด

3.1.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$ แล้วพิกัด P คือ $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$



แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

1) $(-1, 4)$ และ $(5, -6)$

2) $(0, -3)$ และ $(5, 7)$

3) $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$ และ $\left(\frac{3}{2}, -7\right)$

4) $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$ และ $(3, 1)$

2. กำหนดให้จุด B เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AC จงหาพิกัดของจุด A เมื่อ

1) B มีพิกัดเป็น $(1, 2)$ และ C มีพิกัดเป็น $(3, 4)$

2) B มีพิกัดเป็น $(-3, 0)$ และ C มีพิกัดเป็น $(2, -5)$

3. จงหาพิกัดของจุดปลายเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(-5, -2)$, $B(3, 6)$ และ $C(-1, 2)$

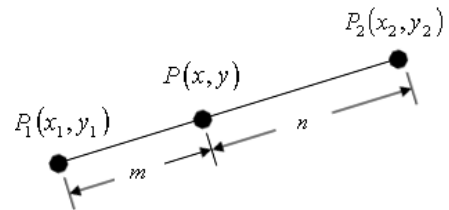
4. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น $(1, 5)$ และ $(-5, 1)$ จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง



ควรรู้ การหาจุดระหว่างจุด 2 จุด

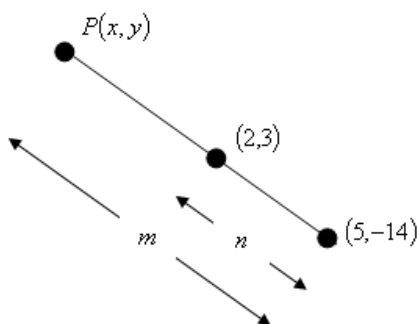
จากรูป ถ้า P เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง P_1 และ P_2 และแบ่ง P_1P_2 ออกเป็นอัตราส่วน $P_1P:PP_2 = m:n$ แล้วพิกัด P

$$\text{คือ } P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\right)$$



แบบฝึกหัด

1. กำหนดจุด $A(-3, -5)$ และ $B(5, 1)$ จงหา
 - 1) จุด C เมื่อ C เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AB โดยที่ $AC:CB = 1:3$
 - 2) จุด D เมื่อ D เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง AB โดยที่ $AD:AB = 1:3$
 - 3) จุด E เมื่อ E เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง AB
2. จากรูป ถ้า $m:n = 7:3$ จงหาพิกัดจุด P

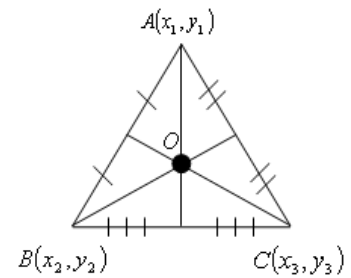




ควรรู้ การหาจุดตัดของเส้นมัธยฐาน

จากรูป กำหนดให้ O เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานทั้งสามเส้น

แล้วพิกัด O คือ $O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(2, 4)$, $(-3, 3)$ และ $(2, -5)$
2. สามเหลี่ยมที่มีจุดยอด $(-2, 5)$, $(2, y)$ และ $(x, -4)$ ถ้าจุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมนี้คือ $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$ จงหา $x+y$



ควรรู้ การหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม

ขั้นที่ 1 : วาดรูป

ขั้นที่ 2 : เลือกจุดเริ่มต้น

ขั้นที่ 3 : วนจุดที่เหลือ (ตามหรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้)

จะได้ พื้นที่ = $\frac{1}{2}$ $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

หมายเหตุ ในขั้นที่ 3 คุณขึ้นเครื่องหมายตรงข้าม คุณลงเครื่องหมายเหมือนเดิม จากนั้นก็นำผลลัพธ์มารวมกัน แล้วหารด้วย 2 ตามขั้นที่ 3

แบบฝึกหัด

1. กำหนดจุด $A(-2,4)$, $B(1,5)$, $C(5,1)$, $D(3,-1)$ และ $E(-3,-1)$ จงหา

- 1) พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A , B และ C
- 2) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A , B , D และ E
- 3) พื้นที่รูปห้าเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A , B , C , D และ E

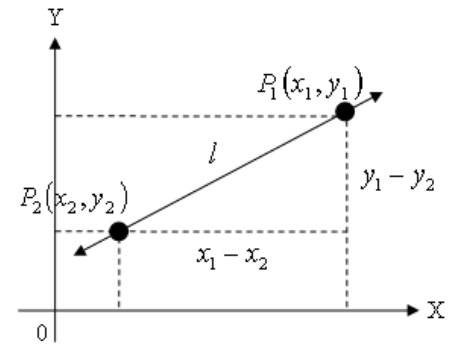
2. กำหนด $A(4,4)$, $B(5,-2)$ และระยะ $PA=PB$ ถ้าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม $PAB = 10$ ตารางหน่วย จงหาพิกัดของจุด P

3.1.3 ความชันของเส้นตรง

บทนิยาม ให้ l เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(x_1, y_1)$ และ $P_2(x_2, y_2)$

โดยที่ $x_1 \neq x_2$

m เป็นความชันของเส้นตรง l ก็ต่อเมื่อ $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



แบบฝึกหัด

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้

1) $(0, 0)$ และ $(2, 4)$

2) $(-2, -3)$ และ $(-1, 7)$

3) $(-4, 3)$ และ $(0, 0)$

4) $(1, 2)$ และ $(4, -1)$

5) $(0, 0)$ และ $(5, 0)$

6) $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

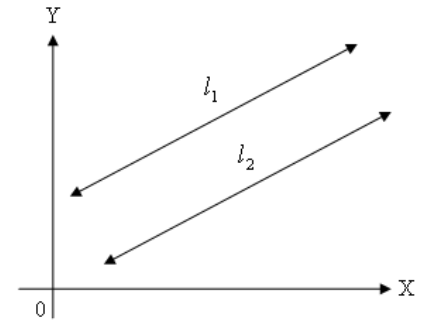
7) $(0, -2)$ และ $(0, 0)$

8) $(-\sqrt{2}, -3)$ และ $(-\sqrt{2}, 3)$

2. จงหาค่า a ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด P และจุด Q มีความชันเท่ากับ m ตามที่กำหนดให้
- 1) $P(2,3)$ และ $Q(4,a)$; $m = 3$ 2) $P(a+1,-2)$ และ $Q(0,6)$; $m = -2$
3. จงหาความชันของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุด $A(-6,4)$, $B(1,4)$ และ $C(-1,-1)$ เป็นจุดยอด
4. กำหนดให้ $A(-6,4)$, $B(1,4)$, $C(-1,-1)$ และ $D(-8,-1)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงหาความชันของส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นซึ่งแบ่งรูปสี่เหลี่ยมนี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
5. กำหนดให้ $A(-6,-2)$, $B(2,-2)$, C และ D เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน AB เป็นฐานที่ยาวเป็น 2 เท่าของด้านคู่ขนาน DC มีมุม A เป็นมุมฉาก และมีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย จงหาความชันของด้าน BC

3.1.4 เส้นขนาน

ทฤษฎีบท 3 เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะขนานกันก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน



แบบฝึกหัด

- กำหนดให้
 - l_1 : ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(2,4)$
 - l_2 : ผ่านจุด $(-2,-3)$ และ $(-3,3)$
 - l_3 : ผ่านจุด $(1,-6)$ และ $(0,0)$
 - l_4 : ผ่านจุด $(-4,3)$ และ $(-2,7)$

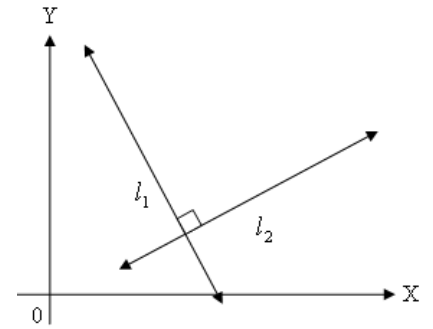
เส้นตรงใดต่อไปนี้ ขนานกัน

- จงแสดงว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2,-4)$ และ $(3,3)$ ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(1,-2)$ และ $(6,5)$
- ถ้าเส้นตรงผ่านจุด $(a,7)$ และ $(-3,-2)$ ขนานกับเส้นตรงผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$ จงหาค่า a

-
4. จุด $A(1,2)$, $B(6,7)$ และ $C(-3,4)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. จงหาค่า k ที่ทำให้ $(k,6)$, $(-1,4)$ และ $(-4,2)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
6. จงแสดงว่า $A(-2,-1)$, $B(1,0)$, $C(4,3)$ และ $D(1,2)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
7. $A(-4,1)$, $B(-5,-4)$, $C(1,-2)$ และ $D(x,y)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ จงหาพิกัดของจุด D

3.1.5 เส้นตั้งฉาก

ทฤษฎีบท 4 เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน Y จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ -1



แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่าจุด $A(-4,3)$, $B(-1,2)$ และ $C(2,11)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. จงบอกความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้ และความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

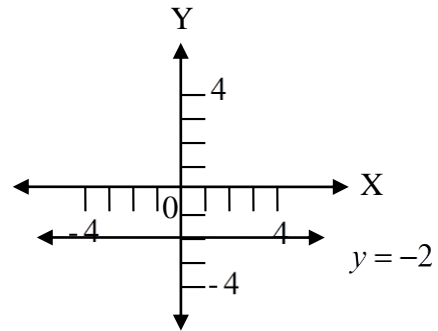
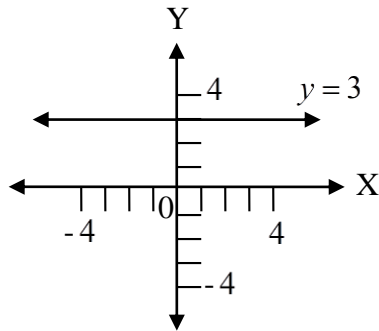
สมการเส้นตรง	ความชันของสมการเส้นตรง	ความชันของเส้นตั้งฉาก
1) ผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$		
2) ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-3,4)$		
3) ผ่านจุด $(-2,-1)$ และ $(-3,1)$		

3. เส้นตรงผ่านจุด $(k,7)$ และ $(-3,-2)$ ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$ จงหาค่า k

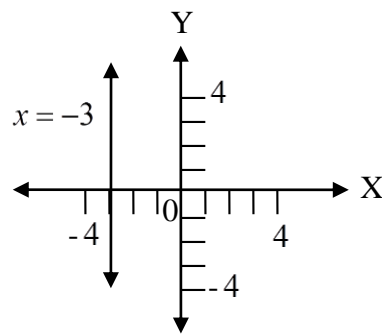
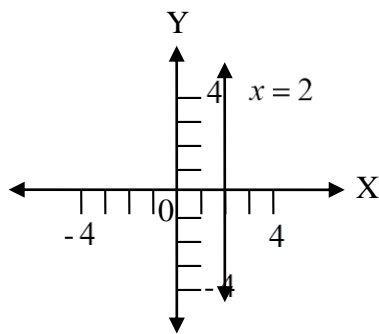
4. จุด $A(2,5)$, $B(2,9)$, $C(6,9)$ และ $D(6,5)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

1) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X คือ $\{(x, y) | y=b\}$ เช่น



2) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน Y คือ $\{(x, y) | x=a\}$ เช่น



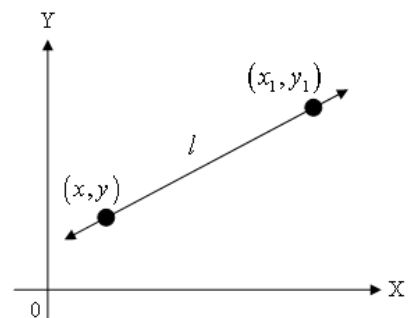
3) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน X และไม่ขนานกับแกน Y

ถ้า (x, y) เป็นจุดอื่นๆ บนเส้นตรง l จะได้

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

สรุป ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1) คือ

$$\{(x, y) | y - y_1 = m(x - x_1)\}$$



รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ $Ax + By + C = 0$

แบบฝึกหัด

1. ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

- | | |
|--|---------------------------------------|
| 1) เส้นตรง $y=3$ ผ่านจุด $(-5, 3)$ | 2) $(-1, -2)$ อยู่บนเส้นตรง $x=-1$ |
| 3) เส้นตรง $x-y+2=0$ ผ่านจุด $(1, 3)$ | 4) $(0, 1)$ อยู่บนเส้นตรง $3x+2y+2=0$ |
| 5) เส้นตรง $2x-3y=1$ ไม่ผ่านจุด $(2, 1)$ | 6) $(2, -1)$ ไม่อยู่บนเส้นตรง $y=x-1$ |

2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงตามสมบัติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- 1) ขนานกับแกน X และอยู่เหนือแกน X เป็นระยะ 5 หน่วย
- 2) ขนานกับแกน X และอยู่ใต้แกน X เป็นระยะ $\frac{1}{2}$ หน่วย
- 3) ขนานกับแกน X และผ่านจุด $(1, -2)$
- 4) ขนานกับแกน Y และอยู่ทางซ้ายแกน Y เป็นระยะ 3 หน่วย
- 5) ขนานกับแกน Y และอยู่ทางขวาแกน Y เป็นระยะ $2\frac{4}{5}$ หน่วย
- 6) ขนานกับแกน Y และอยู่ห่างจากจุด $(-2, 0)$ เป็นระยะ 5 หน่วย
- 7) ที่มีความชันเท่ากับ 3 และผ่านจุด $(1, 2)$

8) ที่มีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุด $(-1, 1)$

9) ผ่านจุด $(-4, 5)$ และ $(-2, -2)$

10) ผ่านจุด $(-1, 1)$ และ $(3, -2)$

11) ผ่านจุด $(-1, 0)$ และขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(1, 2)$ และ $(-3, 3)$

12) ผ่านจุด $(-2, -1)$ และขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-5, 0)$ และ $(-3, 3)$

13) ผ่านจุด $(-1, 0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(1, 2)$ และ $(-3, 3)$

14) ผ่านจุด $(-2, -1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-5, 0)$ และ $(-3, 3)$

15) ผ่านจุด $(3, -1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด $(-1, 1)$ และ $(-1, -4)$

พิจารณาความสัมพันธ์ $\{(x, y) \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$ ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน m และผ่านจุด (x_1, y_1)

จากสมการ $y - y_1 = m(x - x_1)$ เมื่อนำมากระจายและจัดรูปใหม่จะได้

$$y - y_1 = mx - mx_1$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

เนื่องจาก m, x_1 และ y_1 ต่างก็เป็นค่าคงตัว ถ้าให้ $c = -mx_1 + y_1$ จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$y = mx + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

← ความชันของเส้นตรง

และพิจารณาสมการ $Ax + By + C = 0$ เมื่อ $A \neq 0$ และ $B \neq 0$

จากสมการ $Ax + By + C = 0$ เมื่อนำมาจัดรูปใหม่ จะได้ $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

← ความชันของเส้นตรง

ควรรู้ ถ้าเส้นตรงตัดแกน X ที่จุด $(a, 0)$ เรียก a ว่าระยะตัดแกน X (x - intercept)
 ถ้าเส้นตรงตัดแกน Y ที่จุด $(0, b)$ เรียก b ว่าระยะตัดแกน Y (y - intercept)



แบบฝึกหัด

1. จงจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $y = mx + c$ และบอกความชัน ระยะตัดแกน X และแกน Y

สมการ	$y = mx + c$	ความชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
1) $x + y - 5 = 0$				
2) $4x + 2y + 3 = 0$				
3) $5x - y + 1 = 0$				
4) $x - 3y = 5$				
5) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 4$				
6) $3y + 2 = 0$				
7) $x = 4$				

2. กำหนดให้

$$l_1 : 2x + y = 8$$

$$l_2 : 2x - 3y - 6 = 0$$

$$l_3 : y = \frac{2}{3}x + 8$$

$$l_4 : y = 6 - 2x$$

เส้นตรงใดต่อไปนี้ ขนานกัน

สรุปว่า เราสามารถหาความชันได้โดย

ข้อมูลที่กำหนดให้	ความชัน (m)
เส้นตรงผ่านจุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$y = mx + c$	$m =$ สัมประสิทธิ์ของ x
$Ax + By + C = 0$	$m = -\frac{A}{B}$



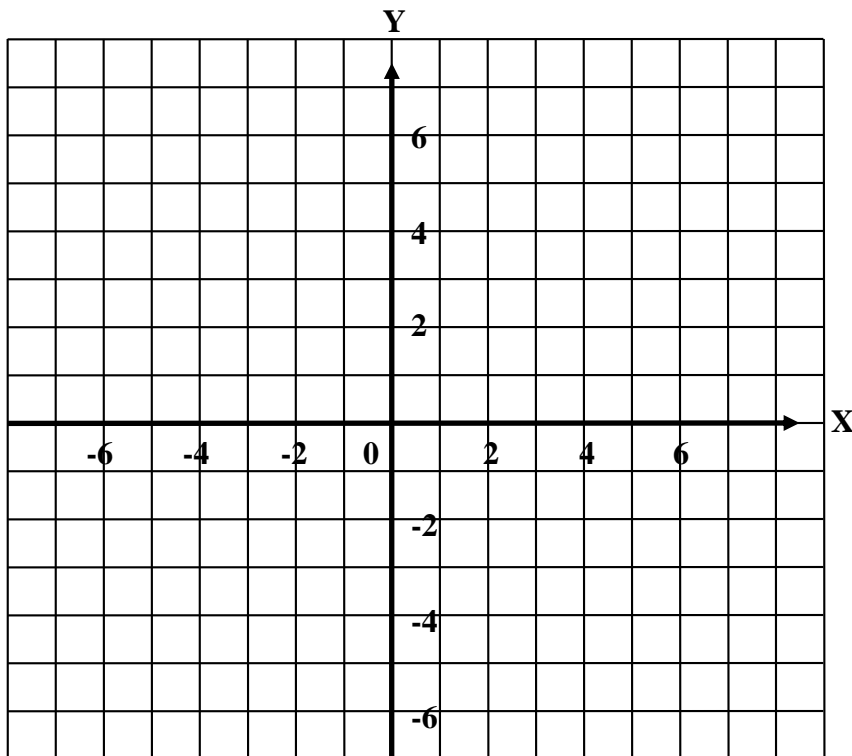
3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(2,1)$ และขนานกับเส้นตรง $y = 6 - 2x$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $x - 3y - 5 = 0$ และผ่านจุด $(-1,4)$

5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(3,-2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 8$

6. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 3y + 1 = 0$ และผ่านจุด $(-2,-2)$

จงเขียนกราฟของ $2x - 3y + 1 = 0$ และ $x + y - 2 = 0$ และหาพิกัดของกราฟทั้งสอง



7. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง $y = \frac{2}{3}x + 8$ และผ่านที่เส้นตรง $2x - 3y + 1 = 0$ ตัดกับเส้นตรง $x + y - 2 = 0$

8. จงหาสมการที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x - 7y - 11 = 0$ และ $3x + 5y - 7 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 3y = 8$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ $-\frac{2}{3}$ และมีระยะตัดแกน Y เท่ากับ 11

10. ให้ $A(-1, 2)$, $B(3, 0)$ และ $C(5, 4)$ เป็นจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม ABC ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (Ent'38)

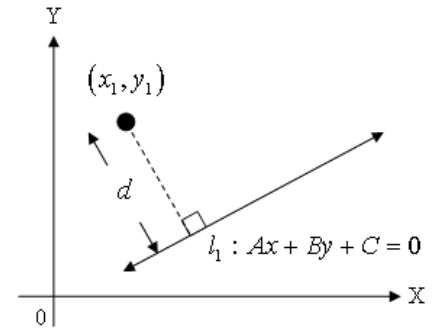
11. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-1, 2)$ วงกลมนี้มีเส้นตรงลากมาสัมผัสที่จุด $(-2, 4)$ จงหาสมการเส้นสัมผัสนี้

12. เส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, -3)$ ตั้งฉากและตัดกับเส้นตรง $x + 2y - 5 = 0$ ที่จุดใด

3.1.6 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

ทฤษฎีบท 5 ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ กับจุด (x_1, y_1)

$$\text{เท่ากับ } d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ หน่วย}$$



แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะห่างระหว่างกราฟของสมการกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $4x + 3y + 7 = 0$, $(1, -2)$

2) $12x - 5y = 2$, $(-2, 2)$

3) $y = 5 - x$, $(2, 3)$

4) $y = 1$, $(0, 0)$

2. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(3, -1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $x + y = 1$ อยากทราบว่ารัศมีของวงกลมยาวกี่หน่วย

3. ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก $(0,0)$ ไปยังเส้นตรง $4x+3y=10$ เป็นระยะทางกี่หน่วย

4. จงหาค่า k ที่ทำให้จุด $(3,5)$ อยู่ห่างจากเส้นตรง $12x-5y+k=0$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย

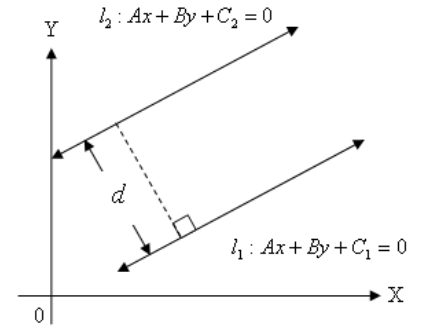
5. จงหาจุดบนแกน X ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง $4x+3y+4=0$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย

6. จงหาจุดบนแกน Y ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง $x-y-5=0$ เป็นระยะทาง $\frac{5}{\sqrt{2}}$ หน่วย

ทฤษฎีบท 6 ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ และ

เส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$

เท่ากับ $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ หน่วย



แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1) $3x + 4y + 11 = 0$, $3x + 4y + 1 = 0$

2) $12x - 5y + 11 = 0$, $12x - 5y = 2$

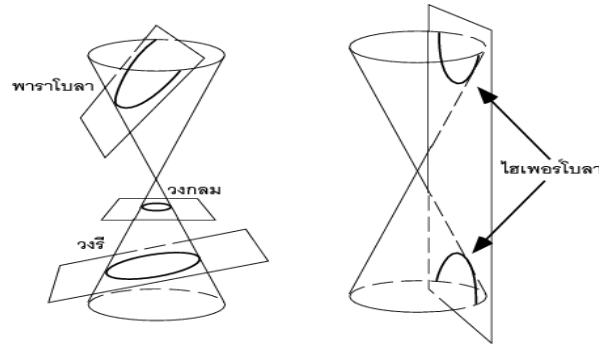
3) $2x - 3y - 13 = 0$, $4x - 6y + 26 = 0$

4) $y = 2x$, $4x - 2y - 3 = 0$

2. วงกลมวงหนึ่งสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 4y - 5 = 0$ และ $3x - 4y + 15 = 0$ อยากทราบว่ารัศมีของวงกลมยาวกี่หน่วย

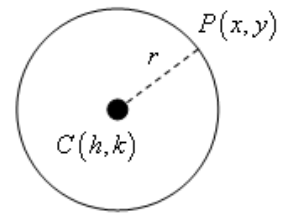
3.2 ภาคตัดกรวย (Conic Section)

คือรูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษาเกิดจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยดังแสดงในรูป เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงกลม** (circle) เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงรี** (ellipse) เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **พาราโบลา** (parabola) และเมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลา** (hyperbola)



3.2.1 วงกลม

บทนิยาม **วงกลม** (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม



รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

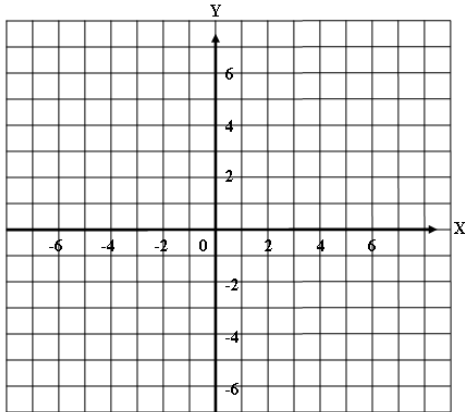
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
จุดศูนย์กลาง	$(0, 0)$	(h, k)
รัศมี	r หน่วย	r หน่วย
กราฟ		

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้ เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

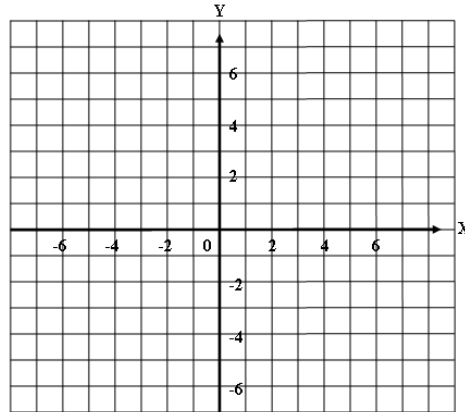
1) $x^2 + y^2 = 1$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



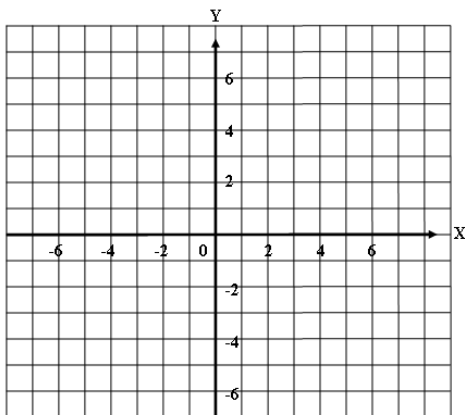
2) $x^2 + y^2 - 16 = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



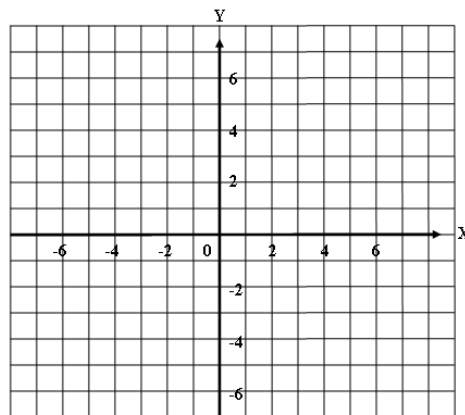
3) $(x-2)^2 + y^2 = 25$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



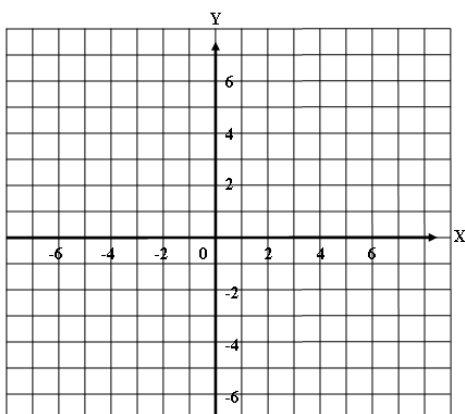
4) $x^2 + (y+1)^2 = 4$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



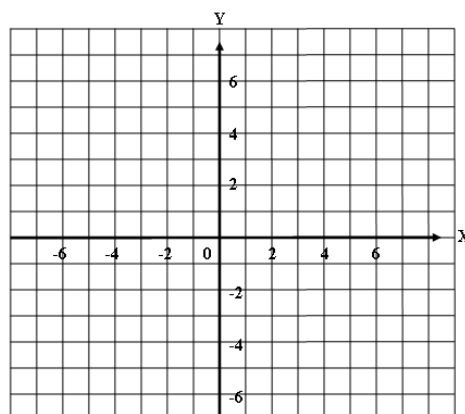
5) $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



6) $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย

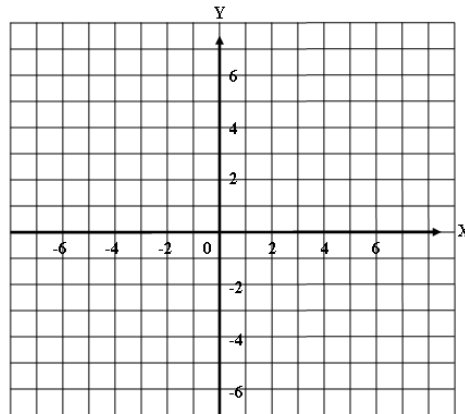
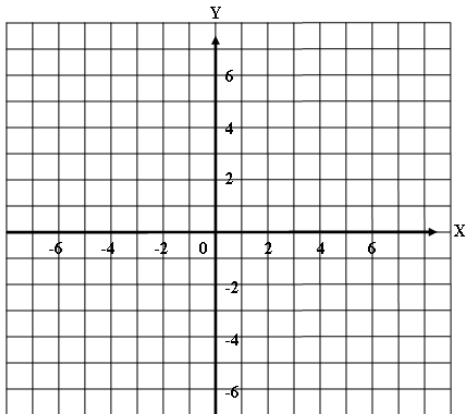


7) $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

8) $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย

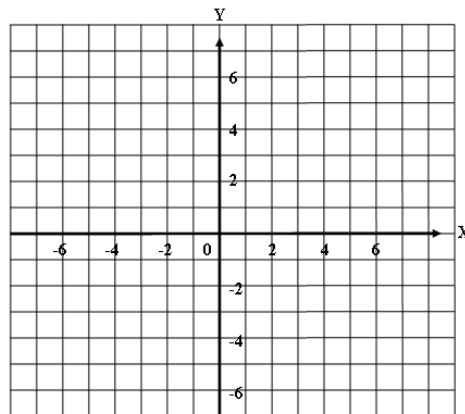
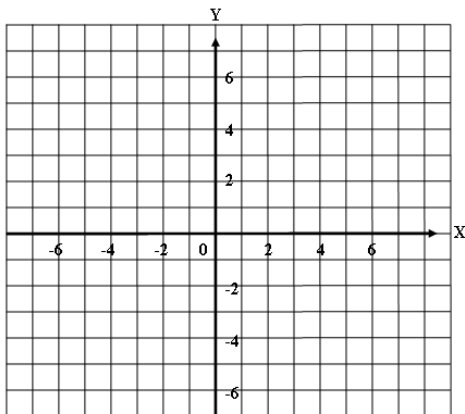
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย



9) $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$

10) $x^2 + y^2 + x + 2y - \frac{5}{2} = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____
รัศมียาว _____ หน่วย รัศมียาว _____ หน่วย



5. จงหาสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 2)$ และรัศมียาว 3 หน่วย
- 2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมียาว $\sqrt{5}$ หน่วย

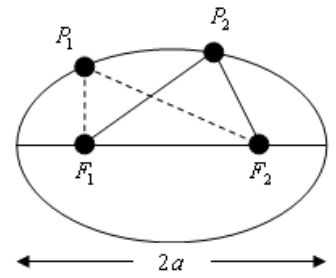
- 3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, -3)$ และสัมผัสแกน X
- 4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-2, 5)$ และผ่านจุด $(1, 9)$

- 5) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ $(-1, 3)$ และ $(7, -5)$
- 6) วงกลมอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และสัมผัสแกน X และแกน Y รัศมียาว 4 หน่วย

6. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, -2)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $3x + 4y - 5 = 0$

3.2.2 วงรี

บทนิยาม **วงรี** (ellipse) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยที่ค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของวงรี



$$F_1F_1 + F_1F_2 = F_2F_1 + F_2F_2 = \text{ค่าคงตัว } (2a)$$

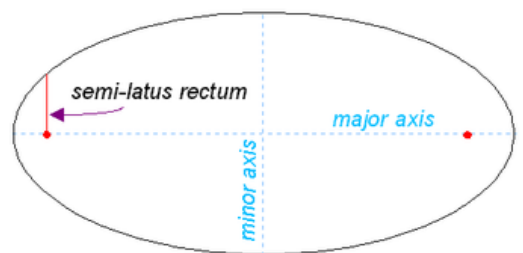
รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

	เมื่อ $a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	(h,k)
จุดยอด	$V_1(-a,0)$ และ $V_2(a,0)$	$V_1(h-a,k)$ และ $V_2(h+a,k)$
โฟกัส	$F_1(-c,0)$ และ $F_2(c,0)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$	$F_1(h-c,k)$ และ $F_2(h+c,k)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$
แกนเอก	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนโท	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่ โฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนวงรี เรียกว่า **เลตัสเรกตัมของวงรี**

ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ $\left| \frac{b^2}{a} \right|$

ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

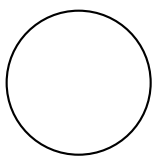


	เมื่อ $a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	(h,k)
จุดยอด	$V_1(0,-a)$ และ $V_2(0,a)$	$V_1(h,k-a)$ และ $V_2(h,k+a)$
โฟกัส	$F_1(0,-c)$ และ $F_2(0,c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$	$F_1(h,k-c)$ และ $F_2(h,k+c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$
แกนเอก	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนโท	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

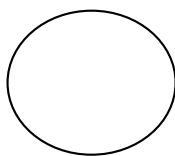
บทนิยาม ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ของวงรี แทนด้วย e คือ อัตราส่วนของ c ต่อ a
 เมื่อ $c^2 = a^2 - b^2$ นั่นคือ $e = \frac{c}{a}$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 นั่นคือ $0 < e < 1$

- ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว)
- ถ้า e มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (มีรูปร่างเกือบจะกลม)



$e = 0.1$



$e = 0.5$



$e = 0.87$



$e = 0.95$

แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความเยื้องศูนย์กลาง ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท ของวงรี แล้วเขียนกราฟ

1) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

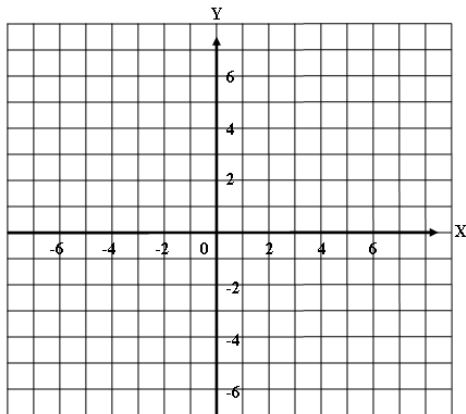
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



2) $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

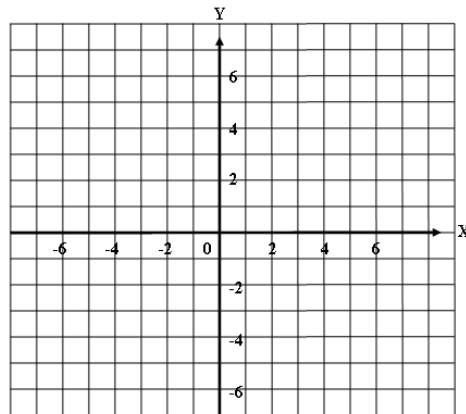
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



3) $4x^2 + 9y^2 = 36$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

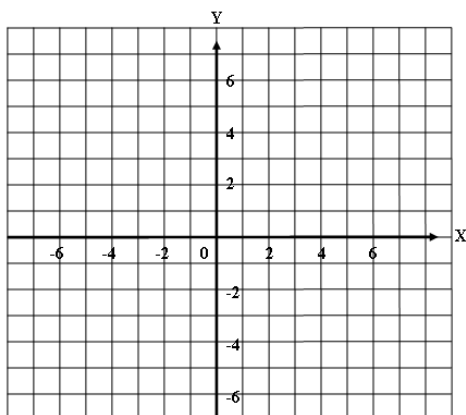
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



4) $5(x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 30$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

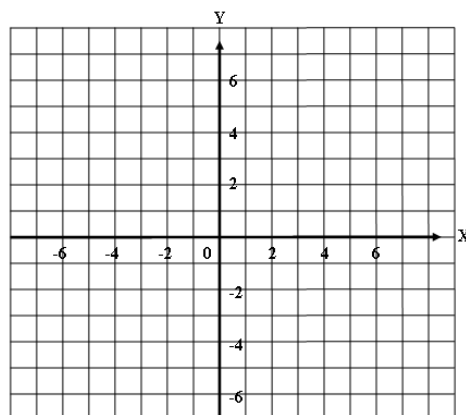
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



5) $25x^2 + 16y^2 = 400$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

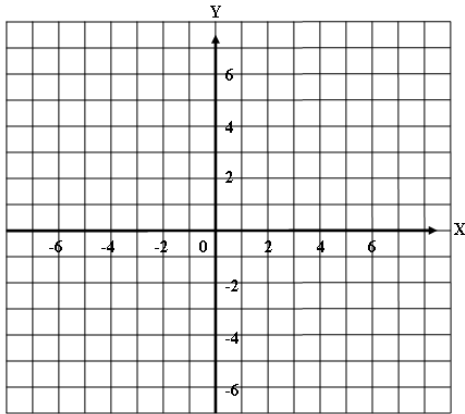
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



6) $25x^2 + 4(y+1)^2 = 100$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

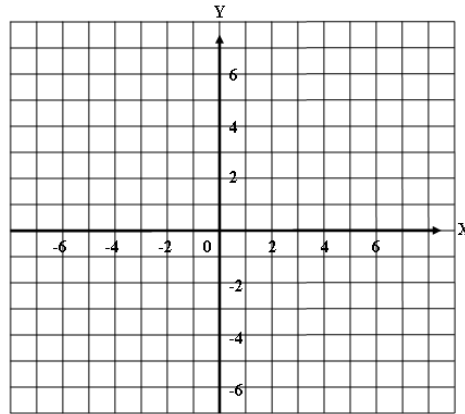
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



7) $16x^2 + 25y^2 - 200y = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

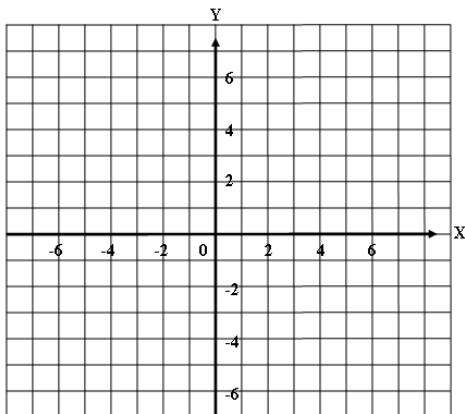
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



8) $2x^2 + 11y^2 + 4x - 44y + 24 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

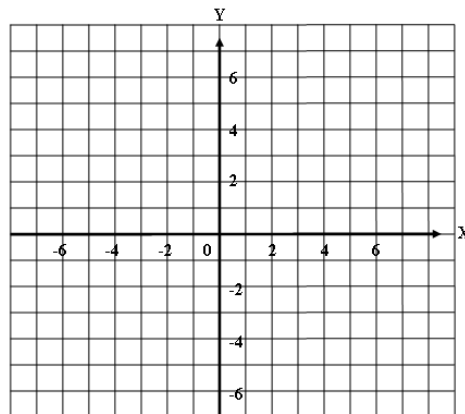
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



9) $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

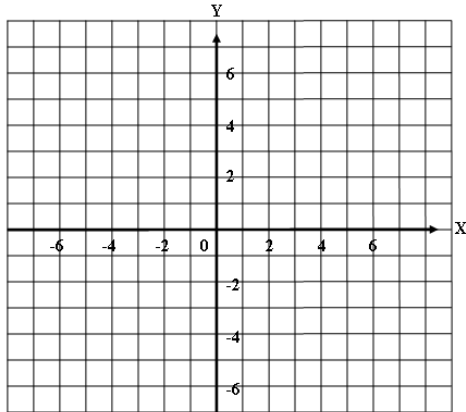
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



10) $25x^2 + 16y^2 - 50x - 64y - 311 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

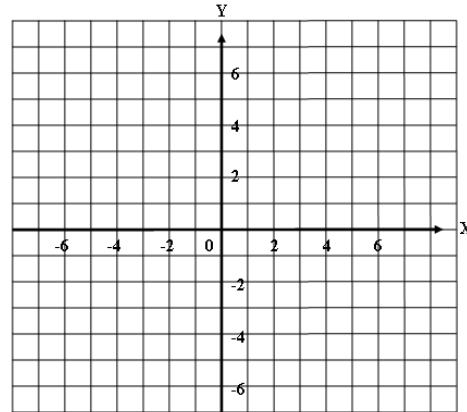
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ _____

แกนเอกยาว _____ หน่วย

แกนโทยาว _____ หน่วย



2. จงหาเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $3x + 4y - 5 = 0$

3. กำหนดสมการวงรี $9x^2 + 5y^2 - 36x - 10y - 139 = 0$ จุด F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของวงรี ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันมีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ และผ่านจุด F_1 และ F_2 ตามลำดับ จงหาระยะระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

4. จงหาสมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

- 1) จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ แกนเอกยาว 10 หน่วย 2) จุดศูนย์กลาง $(0,0)$ แกนเอกยาว 6 หน่วย
แกนโทยาวยาว 8 หน่วย และโฟกัสอยู่บน แกนโทยาวยาว 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บน
แกน Y แกน X

3) โฟกัส $(-3,0), (3,0)$ และ
จุดยอด $(-5,0), (5,0)$

4) โฟกัส $(0,-4), (0,4)$ และ
จุดยอด $(0,-5), (0,5)$

5) โฟกัส $(-3,1), (3,1)$ และแกนเอกยาว
10 หน่วย

6) โฟกัส $(-3,2), (-3,-6)$ และแกนโทยาว
8 หน่วย

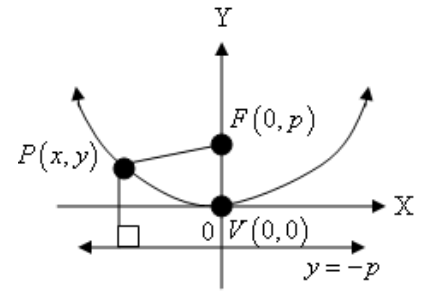
- 7) จุดปลายแกนเอก $(-4, -1), (4, -1)$ และ ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย
- 8) จุดปลายแกนโท $(-4, -1), (4, -1)$ และ ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย

- 9) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{4}$ และมีโฟกัส $(-3, -2), (3, -2)$
- 10) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{\sqrt{10}}{5}$ และมีจุดยอด $(-1, 6), (-1, -4)$

- 11) โฟกัส $(1, 1), (1, 3)$ และจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนแกน Y
- 12) จุดยอด $(7, -8), (7, 12)$ และผ่านจุด $(1, 8)$

3.2.3 พาราโบลา

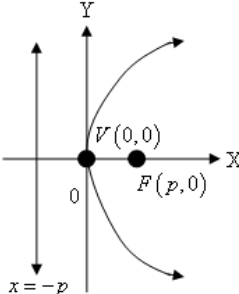
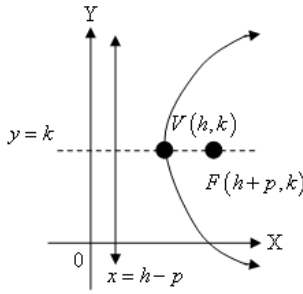
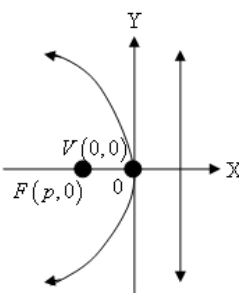
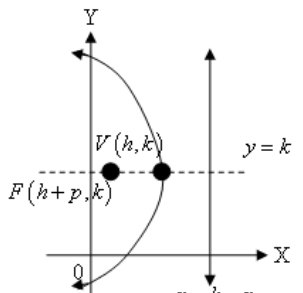
บทนิยาม พาราโบลา (parabola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด F ที่ตั้งอยู่กับจุดหนึ่งและเส้นตรง l ที่ตั้งอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตั้งอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **โฟกัส** และเส้นตรงที่ตั้งอยู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **ไดเรกตริกซ์** (directrix) ของพาราโบลา



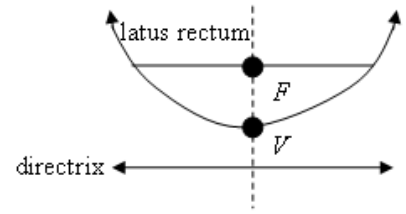
รูปแบบทั่วไปของสมการพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือเส้นโค้งคว่ำลง $x^2 + Ax + By + C = 0$

เมื่อ $p > 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$x^2 = 4py$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(0,p)$	$F(h,k+p)$
ไดเรกตริกซ์	$y = -p$	$y = k - p$
แกนสมมาตร	$x = 0$	$x = h$
กราฟ		
เมื่อ $p < 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$x^2 = 4py$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(0,p)$	$F(h,k+p)$
ไดเรกตริกซ์	$y = -p$	$y = k - p$
แกนสมมาตร	$x = 0$	$x = h$
กราฟ		

รูปแบบทั่วไปของสมการพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือเส้นโค้งคว่ำลง $y^2 + Ax + By + C = 0$

เมื่อ $p > 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดด้านขวา		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(p,0)$	$F(h+p,k)$
ไดเรกทริกซ์	$x = -p$	$x = h - p$
แกนสมมาตร	$y = 0$	$y = k$
กราฟ		
เมื่อ $p < 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดด้านซ้าย		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(p,0)$	$F(h+p,k)$
ไดเรกทริกซ์	$x = -p$	$x = h - p$
แกนสมมาตร	$y = 0$	$y = k$
กราฟ		

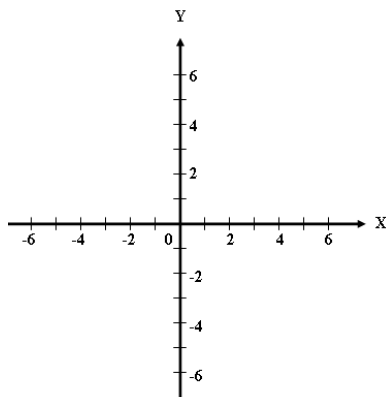
เลตัสเรกตัม (latus rectum) คือคอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา และผ่านโฟกัสของพาราโบลา (ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนพาราโบลา เรียกว่า **คอร์ด** (chord) ของพาราโบลา) ความยาวของเลตัสเรกตัม ใช้วัด “ความกว้าง” ของพาราโบลา ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ $|2p|$ ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว $|4p|$ หน่วย



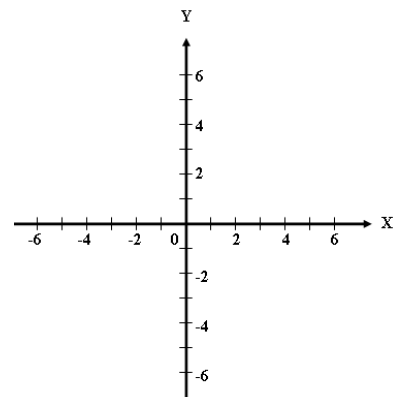
แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ และแกนสมมาตรของพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟอย่างคร่าวๆ

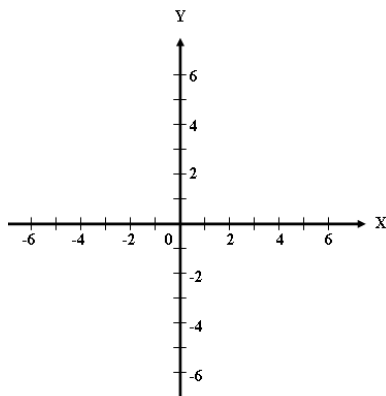
1) $x^2 = 8y$



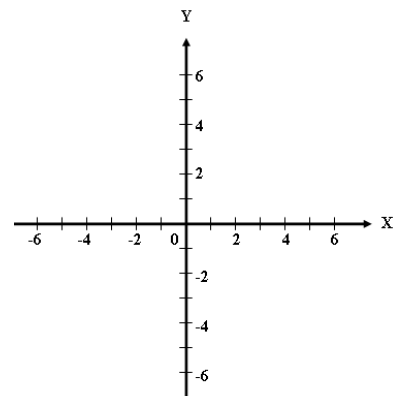
2) $(x-3)^2 = 4y$



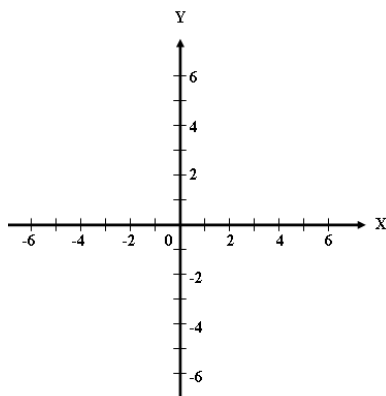
3) $x^2 + 4y = 0$



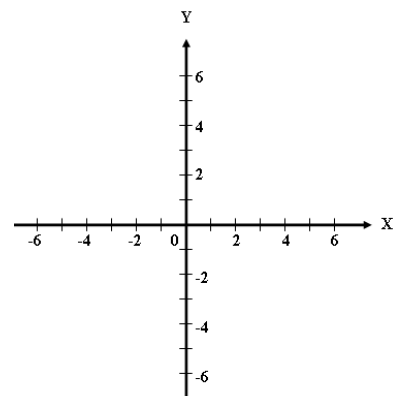
4) $(x+1)^2 = -12(y-2)$



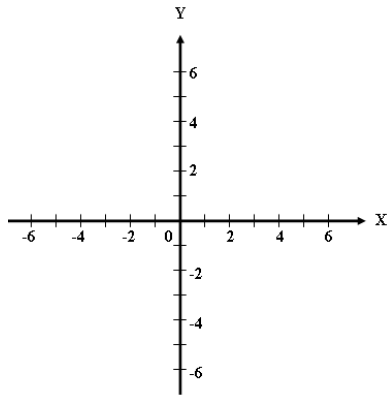
5) $y^2 - 20x = 0$



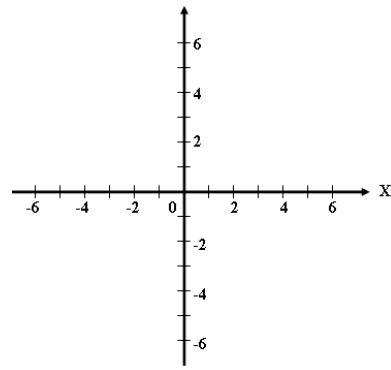
6) $y^2 = 7(x+2)$



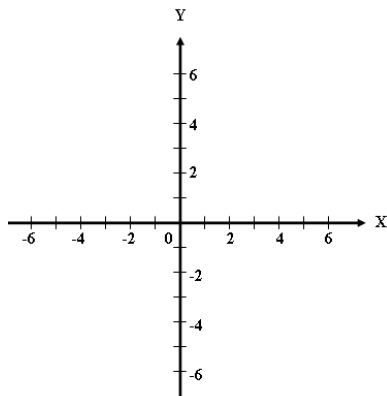
7) $\frac{y^2}{8} + x = 0$



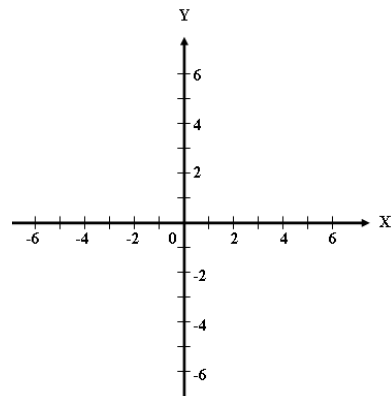
8) $(y+1)^2 = -12(x+3)$



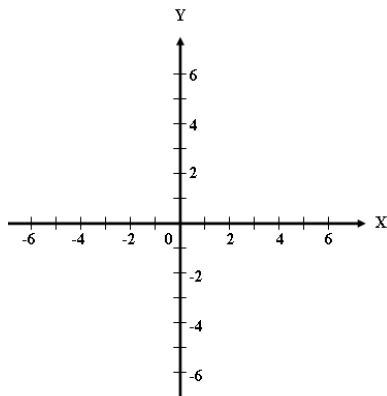
9) $x^2 - 4y = 8$



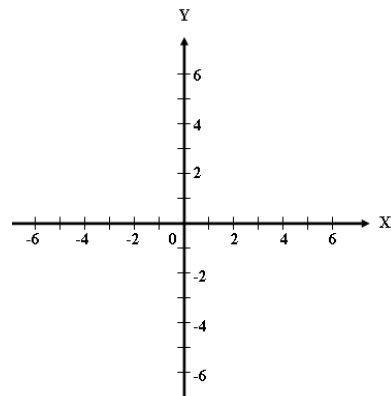
10) $x^2 + 12y = 36$



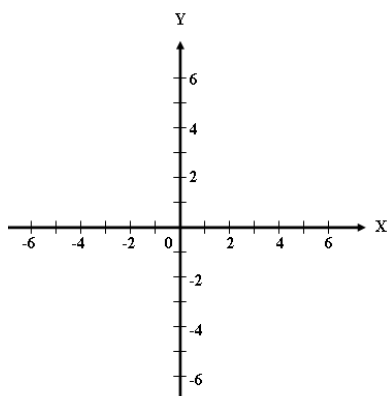
11) $y^2 - 8x - 8 = 0$



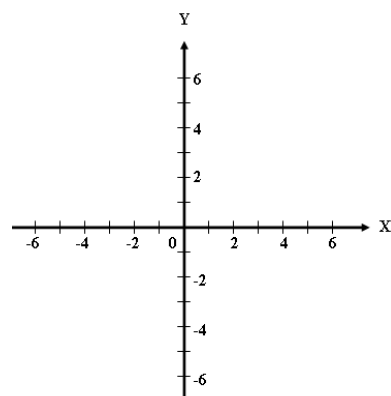
12) $y^2 + 8x - 32 = 0$



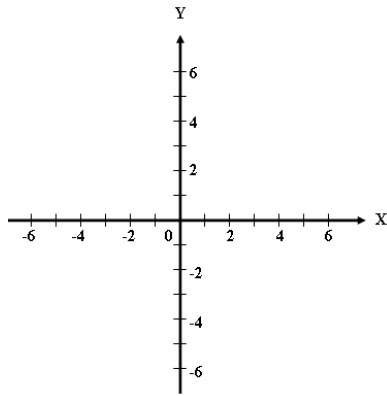
13) $x^2 + 4x - 8y + 28 = 0$



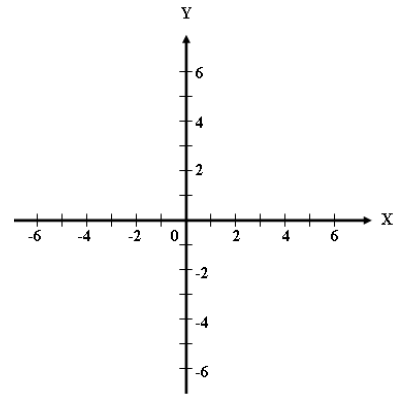
14) $x^2 - 6x + 8y + 41 = 0$



15) $y^2 + 4y - 8x - 36 = 0$



16) $y^2 - 10y + 4x + 17 = 0$



2. ให้ A เป็นจุดยอดของพาราโบลา $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$ และ B เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 + 4y - 6x - 8 = 0$ ระยะเวลา AB เท่ากับกี่หน่วย

3. จงหาสมการพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

1) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ และ
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(3,0)$

2) จุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0)$ และ
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(0,-2)$

3) จุดยอดอยู่ที่จุด $(1,3)$ และ
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(1,4)$

4) จุดยอดอยู่ที่จุด $(-2,2)$ และ
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(-5,2)$

5) ไดรเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $x = -4$ และ
โฟกัสอยู่ที่จุด $(4,0)$

6) ไดรเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = 2$ และ
โฟกัสอยู่ที่จุด $(6,6)$

7) ไดรเรกตริกซ์ คือ เส้นตรง $y = -1$ และ
โฟกัสอยู่ที่จุด $(3,-5)$

8) จุดยอดอยู่ที่จุด $(1,1)$ และไดรเรกตริกซ์ทับแกน X

4. จงเขียนสมการพาราโบลา ซึ่งมีแกน X เป็นแกนสมมาตร กราฟตัดแกน X ที่จุด $(-4,0)$ ตัดแกน Y ที่ $(0,4)$ และ $(0,-4)$

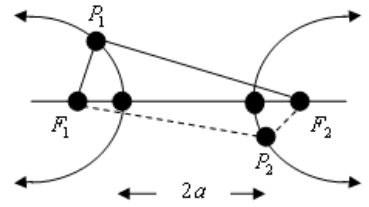
5. จงเขียนสมการพาราโบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1,2)$ เส้นไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน Y และจุดยอดอยู่บนเส้นตรง $x - y + 2 = 0$

6. จงเขียนสมการพาราโบลา มีจุดยอดที่ $(2,3)$ และผ่านจุด $(4,5)$ มีแกนขนานกับแกน X

3.2.4 ไฮเพอร์โบลา

แม้ว่ารูปร่างของไฮเพอร์โบลากับวงรีจะแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง แต่บทนิยามและสมการของภาคตัดกรวยสองชนิดนี้คล้ายกัน โดยใช้ *ผลบวก* ของระยะทางจากโฟกัสทั้งสองนิยามวงรี ในขณะที่ไฮเพอร์โบลาใช้ *ผลต่าง*

บทนิยาม ไฮเพอร์โบลา (hiperbola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด F_1 และ F_2 ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยที่ค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา



$$|PF_1 - PF_2| = |P_2F_1 - P_2F_2| = \text{ค่าคงตัว } (2a)$$

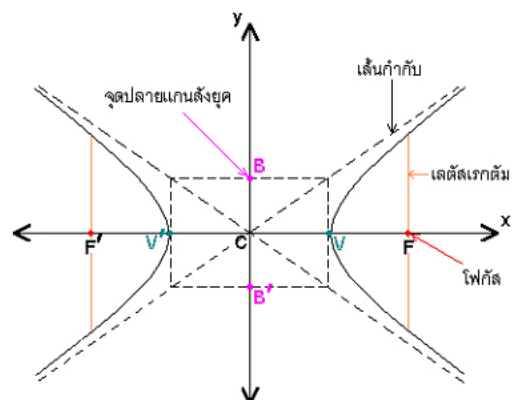
รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

	แกนตามขวางขนานกับแกน X	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	(h,k)
จุดยอด	$V_1(-a,0)$ และ $V_2(a,0)$	$V_1(h-a,k)$ และ $V_2(h+a,k)$
โฟกัส	$F_1(-c,0)$ และ $F_2(c,0)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$	$F_1(h-c,k)$ และ $F_2(h+c,k)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$
แกนตามขวาง	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนสังยุค	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี $Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$

	แกนตามขวางขนานกับแกน Y	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	(h,k)
จุดยอด	$V_1(0,-a)$ และ $V_2(0,a)$	$V_1(h,k-a)$ และ $V_2(h,k+a)$
โฟกัส	$F_1(0,-c)$ และ $F_2(0,c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$	$F_1(h,k-c)$ และ $F_2(h,k+c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$
แกนตามขวาง	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนสังยุค	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางที่ โฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนไฮเพอร์โบลา เรียกว่า **เลตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลา** ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ $\left| \frac{b^2}{a} \right|$ ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว $\left| \frac{2b^2}{a} \right|$ หน่วย



แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนลึงยุค และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟอย่างคร่าวๆ

1) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____

2) $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

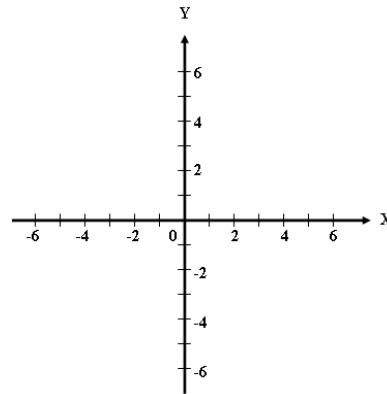
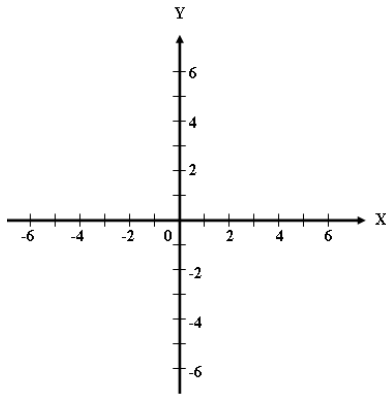
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



3) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____

4) $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

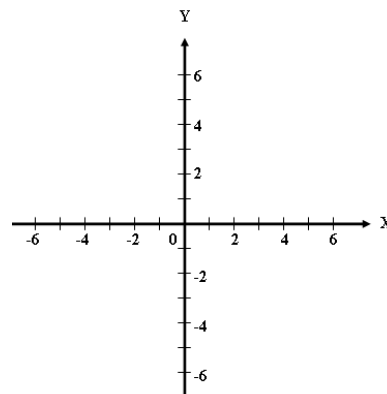
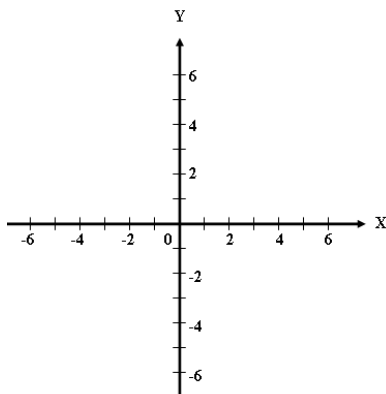
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



5) $9x^2 - 4y^2 = 36$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

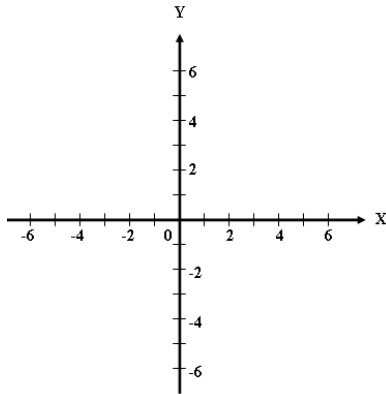
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนล้อยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



6) $9(x+2)^2 - 25y^2 = 225$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

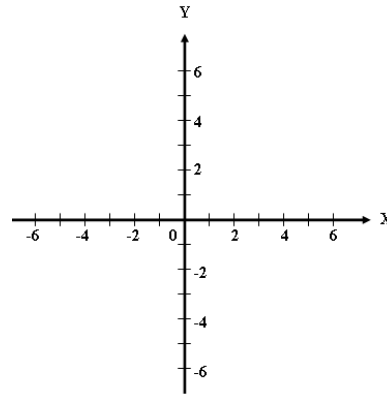
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนล้อยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



7) $y^2 - 3x^2 - 3 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

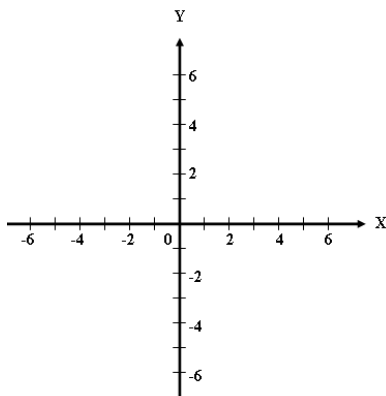
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนล้อยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



8) $9(y-2)^2 - 7(x+3)^2 = 63$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

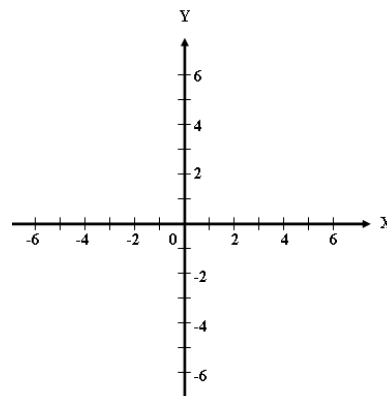
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนล้อยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



9) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 80 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

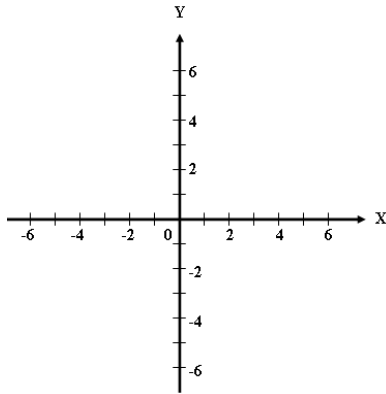
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



10) $4x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 36 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

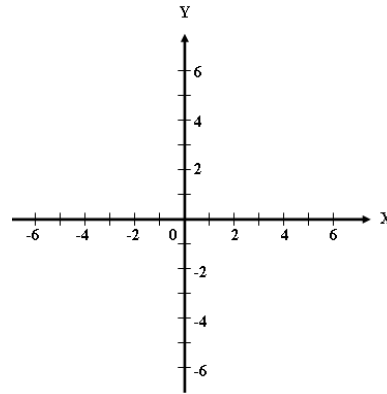
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



11) $16y^2 - 9x^2 + 36x - 32y - 164 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

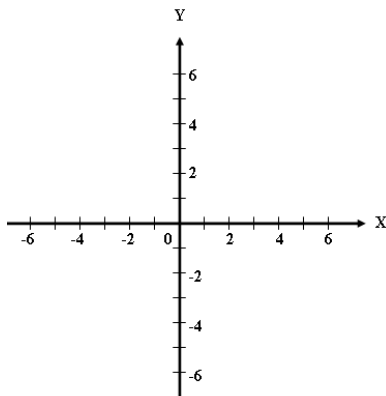
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



12) $4y^2 - 9x^2 + 18x - 16y - 29 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด _____

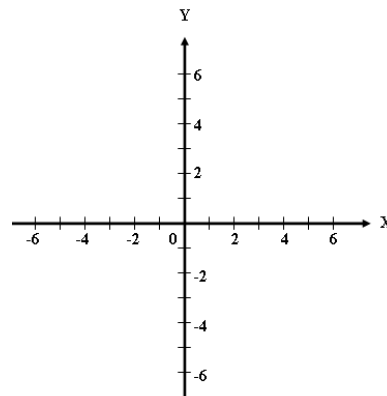
จุดยอดอยู่ที่จุด _____

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด _____

แกนตามขวางยาว _____ หน่วย

แกนลึงยุคยาว _____ หน่วย

เส้นกำกับ คือ _____



2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) จุดยอด คือจุด $(-5,0), (5,0)$ และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย
- 2) โฟกัส คือจุด $(0,-6), (0,6)$ และจุด $(0,-2), (0,2)$ เป็นจุดยอด
- 3) โฟกัส คือจุด $(-5,0), (5,0)$ และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย
- 4) จุดยอด คือจุด $(0,-6), (0,6)$ และไฮเพอร์โบล่าผ่านจุด $(-5,9)$
- 5) จุดยอด คือจุด $(-1,0), (1,0)$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm 5x$
- 6) โฟกัส คือจุด $(0,-8), (0,8)$ และเส้นกำกับ คือ $y = \pm \frac{1}{2}x$

7) จุดยอด คือจุด $(-1,2), (5,2)$ และ
แกนสังยุคยาว 6 หน่วย

8) โฟกัส คือจุด $(-1,-6), (-1,0)$ และ
แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

9) จุดยอด คือจุด $(2,2), (2,6)$ และ
โฟกัส คือจุด $(2,1), (2,7)$

10) จุดยอด คือจุด $(1,-2), (1,2)$ และ
เส้นกำกับ คือ $y = \pm \frac{1}{2}x$

11) จุดศูนย์กลางที่จุด $(3,4)$, มีจุดยอดจุดหนึ่ง
ที่จุด $(3,9)$ และมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งที่ $(3,11)$

12) มีจุดศูนย์กลางและจุดยอดเดียวกันกับวงรีที่สมการ
 $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$ และโฟกัสทั้งสองห่างกัน 18 หน่วย