

### บทที่ 3

### เรขาคณิตวิเคราะห์

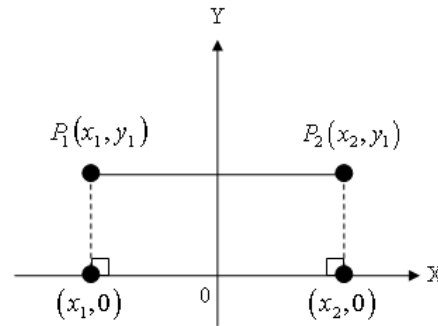
#### 3.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับเรขาคณิตวิเคราะห์

##### 3.1.1 ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

กำหนดให้  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  เป็นจุดในระนาบ

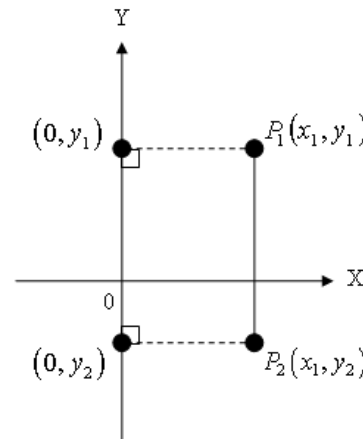
1) กรณีที่  $P_1$  และ  $P_2$  อยู่บนแกน  $X$  หรืออยู่บนส่วนเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $X$

$$P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |x_1 - x_2|$$



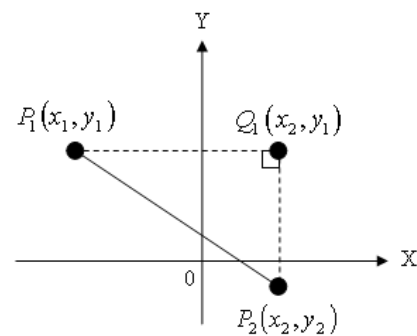
2) กรณีที่  $P_1$  และ  $P_2$  อยู่บนแกน  $Y$  หรืออยู่บนส่วนเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $Y$

$$P_1P_2 = |\overline{P_1P_2}| = |y_1 - y_2|$$



3) กรณีที่  $P_1$  และ  $P_2$  อยู่บนส่วนของเส้นตรงซึ่งไม่ขนานกับแกน  $X$  และไม่ขนานกับแกน  $Y$

$$\begin{aligned} P_1P_2 &= \sqrt{P_1Q^2 + P_2Q^2} \\ &= \sqrt{|x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \end{aligned}$$



**ทฤษฎีบท 1** ถ้า  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  เป็นจุดในระนาบ

ระยะทางระหว่าง  $P_1$  และ  $P_2$  เท่ากับ  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  หน่วย

## แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

1)  $(0,0)$  และ  $(4,0)$

2)  $(-2,3)$  และ  $(3,3)$

3)  $(0,-3)$  และ  $(0,0)$

4)  $(-1,-2)$  และ  $(-1,2)$

5)  $(4,5\sqrt{2})$  และ  $(4,2\sqrt{2})$

6)  $(0,0)$  และ  $(3,4)$

7)  $(-2,1)$  และ  $(10,8)$

8)  $(-1,-3)$  และ  $(5,5)$

9)  $(-2,-2)$  และ  $(-1,1)$

10)  $(2\sqrt{3},-\sqrt{6})$  และ  $(\sqrt{3},0)$

2. สามเหลี่ยมที่กำหนดจุดยอดให้ต่อไปนี้ เป็นสามเหลี่ยมชนิดใด

1)  $A(1,3)$ ,  $B(-4,3)$  และ  $C(1,-2)$

2)  $A(-5,-1)$ ,  $B(2,3)$  และ  $C(3,-2)$

3)  $A(2,2)$ ,  $B(-2,-2)$  และ  $C(2\sqrt{3},-2\sqrt{3})$

3. รูปสามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุด  $(5,0)$ ,  $(-6,0)$  และ  $(-4,4)$  เป็นจุดยอด จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมนี้

4. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(2,3)$  และผ่านจุด  $(8,-5)$

- 1) จงหาความยาวของรัศมีของวงกลมนี้                      2) จุด  $(-6,9)$  อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมนี้หรือไม่

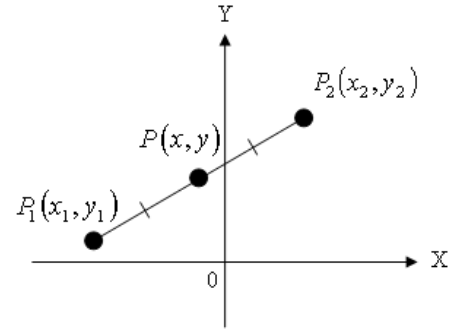
5. จุด  $(0,-1)$ ,  $(2,3)$  และ  $(5,9)$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

6. จงหาจุดบนแกน  $Y$  ที่อยู่ห่างจากจุด  $(-4,4)$  และ  $(4,10)$  เป็นระยะทางเท่ากัน

7. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(1,0)$  และมีรัศมียาวเท่ากับ 5 หน่วย จงหาความยาวของคอร์ดของวงกลมนี้ ซึ่งมีจุด  $(2,2)$  เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด

### 3.1.2 จุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุด

**ทฤษฎีบท 2** ถ้า  $P(x, y)$  เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$  แล้วพิกัด  $P$  คือ  $P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$



**แบบฝึกหัด**

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดแต่ละคู่ต่อไปนี้

1)  $(-1, 4)$  และ  $(5, -6)$

2)  $(0, -3)$  และ  $(5, 7)$

3)  $\left(-\frac{5}{2}, -1\right)$  และ  $\left(\frac{3}{2}, -7\right)$

4)  $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$  และ  $(3, 1)$

2. กำหนดให้จุด  $B$  เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง  $AC$  จงหาพิกัดของจุด  $A$  เมื่อ

1)  $B$  มีพิกัดเป็น  $(1, 2)$  และ  $C$  มีพิกัดเป็น  $(3, 4)$

2)  $B$  มีพิกัดเป็น  $(-3, 0)$  และ  $C$  มีพิกัดเป็น  $(2, -5)$

3. จงหาพิกัดของจุดปลายเส้นมัธยฐานของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่  $A(-5,-2)$  ,  $B(3,6)$  และ  $C(-1,2)$

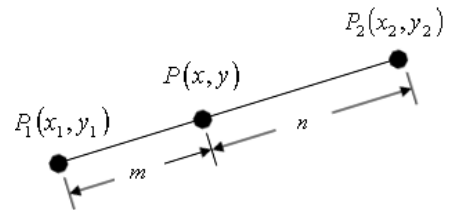
4. ถ้าจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่งเป็น  $(1,5)$  และ  $(-5,1)$  จงหาพิกัดของจุดศูนย์กลาง



**ควรรู้** การหาจุดระหว่างจุด 2 จุด

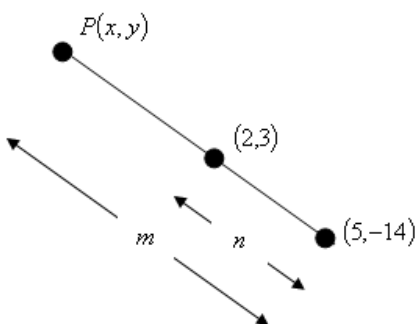
จากรูป ถ้า  $P$  เป็นจุดที่อยู่ระหว่าง  $P_1$  และ  $P_2$  และแบ่ง  $P_1P_2$  ออกเป็นอัตราส่วน  $P_1P:PP_2 = m:n$  แล้วพิกัด  $P$

$$\text{คือ } P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{n+m}, \frac{ny_1 + my_2}{n+m}\right)$$



**แบบฝึกหัด**

1. กำหนดจุด  $A(-3,-5)$  และ  $B(5,1)$  จงหา
  - 1) จุด  $C$  เมื่อ  $C$  เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง  $AB$  โดยที่  $AC:CB = 1:3$
  - 2) จุด  $D$  เมื่อ  $D$  เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง  $AB$  โดยที่  $AD:AB = 1:3$
  - 3) จุด  $E$  เมื่อ  $E$  เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง  $AB$
2. จากรูป ถ้า  $m:n = 7:3$  จงหาพิกัดจุด  $P$

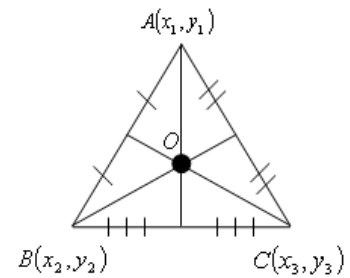




### ควรรู้ การหาจุดตัดของเส้นมัธยฐาน

จากรูป กำหนดให้  $O$  เป็นจุดตัดของเส้นมัธยฐานทั้งสามเส้น

แล้วพิกัด  $O$  คือ  $O\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$



### แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น  $(2, 4)$ ,  $(-3, 3)$  และ  $(2, -5)$
2. สามเหลี่ยมที่มีจุดยอด  $(-2, 5)$ ,  $(2, y)$  และ  $(x, -4)$  ถ้าจุดตัดของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยมนี้คือ  $\left(\frac{5}{3}, -1\right)$  จงหา  $x+y$



**ควรรู้** การหาพื้นที่รูปหลายเหลี่ยม

ขั้นที่ 1 : วาดรูป

ขั้นที่ 2 : เลือจุดเริ่มต้น

ขั้นที่ 3 : วนจุดที่เหลือ (ตามหรือทวนเข็มนาฬิกาก็ได้)

จะได้ พื้นที่ =  $\frac{1}{2}$   $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$

**หมายเหตุ** ในขั้นที่ 3 คุณขึ้นเครื่องหมายตรงข้าม คุณลงเครื่องหมายเหมือนเดิม จากนั้นก็นำผลลัพธ์มารวมกัน แล้วหารด้วย 2 ตามขั้นที่ 3

**แบบฝึกหัด**

1. กำหนดจุด  $A(-2,4)$ ,  $B(1,5)$ ,  $C(5,1)$ ,  $D(3,-1)$  และ  $E(-3,-1)$  จงหา

- 1) พื้นที่รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น  $A$ ,  $B$  และ  $C$
- 2) พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น  $A$ ,  $B$ ,  $D$  และ  $E$
- 3) พื้นที่รูปห้าเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  และ  $E$

2. กำหนด  $A(4,4)$ ,  $B(5,-2)$  และระยะ  $PA=PB$  ถ้าพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม  $PAB = 10$  ตารางหน่วย จงหาพิกัดของจุด  $P$

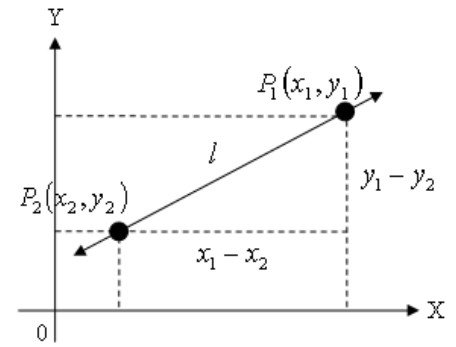


### 3.1.3 ความชันของเส้นตรง

บทนิยาม ให้  $l$  เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด  $P_1(x_1, y_1)$  และ  $P_2(x_2, y_2)$

โดยที่  $x_1 \neq x_2$

$m$  เป็นความชันของเส้นตรง  $l$  ก็ต่อเมื่อ  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$



#### แบบฝึกหัด

1. จงหาความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุดสองจุดต่อไปนี้

1)  $(0, 0)$  และ  $(2, 4)$

2)  $(-2, -3)$  และ  $(-1, 7)$

3)  $(-4, 3)$  และ  $(0, 0)$

4)  $(1, 2)$  และ  $(4, -1)$

5)  $(0, 0)$  และ  $(5, 0)$

6)  $\left(-4, -\frac{1}{2}\right)$  และ  $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$

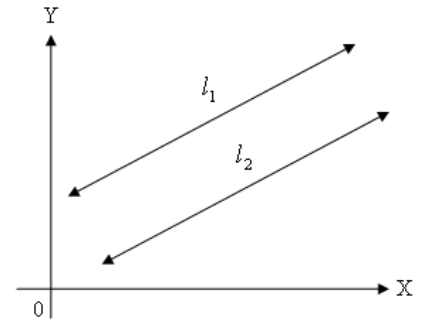
7)  $(0, -2)$  และ  $(0, 0)$

8)  $(-\sqrt{2}, -3)$  และ  $(-\sqrt{2}, 3)$

2. จงหาค่า  $a$  ที่ทำให้เส้นตรงที่ผ่านจุด  $P$  และจุด  $Q$  มีความชันเท่ากับ  $m$  ตามที่กำหนดให้
- 1)  $P(2,3)$  และ  $Q(4,a)$  ;  $m = 3$                       2)  $P(a+1,-2)$  และ  $Q(0,6)$  ;  $m = -2$
3. จงหาความชันของแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุด  $A(-6,4)$ ,  $B(1,4)$  และ  $C(-1,-1)$  เป็นจุดยอด
4. กำหนดให้  $A(-6,4)$ ,  $B(1,4)$ ,  $C(-1,-1)$  และ  $D(-8,-1)$  เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงหาความชันของส่วนของเส้นตรงแต่ละเส้นซึ่งแบ่งรูปสี่เหลี่ยมนี้ออกเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีพื้นที่เท่ากัน
5. กำหนดให้  $A(-6,-2)$ ,  $B(2,-2)$ ,  $C$  และ  $D$  เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู มีด้าน  $AB$  เป็นฐานที่ยาวเป็น 2 เท่าของด้านคู่ขนาน  $DC$  มีมุม  $A$  เป็นมุมฉาก และมีพื้นที่ 24 ตารางหน่วย จงหาความชันของด้าน  $BC$

## 3.1.4 เส้นขนาน

**ทฤษฎีบท 3** เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน  $Y$  จะขนานกันก็ต่อเมื่อ ความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากัน



## แบบฝึกหัด

- กำหนดให้
  - $l_1$  : ผ่านจุด  $(0,0)$  และ  $(2,4)$
  - $l_2$  : ผ่านจุด  $(-2,-3)$  และ  $(-3,3)$
  - $l_3$  : ผ่านจุด  $(1,-6)$  และ  $(0,0)$
  - $l_4$  : ผ่านจุด  $(-4,3)$  และ  $(-2,7)$

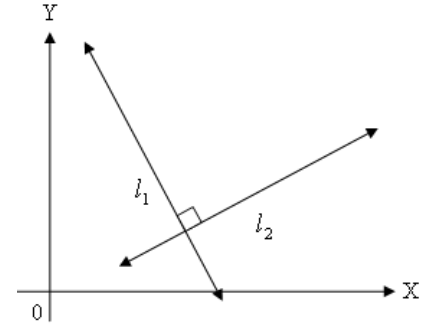
เส้นตรงใดต่อไปนี้ ขนานกัน

- จงแสดงว่า เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(-2,-4)$  และ  $(3,3)$  ขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(1,-2)$  และ  $(6,5)$
- ถ้าเส้นตรงผ่านจุด  $(a,7)$  และ  $(-3,-2)$  ขนานกับเส้นตรงผ่านจุด  $(3,2)$  และ  $(1,-4)$  จงหาค่า  $a$

- 
4. จุด  $A(1,2)$ ,  $B(6,7)$  และ  $C(-3,4)$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่ เพราะเหตุใด
5. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้  $(k,6)$ ,  $(-1,4)$  และ  $(-4,2)$  อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน
6. จงแสดงว่า  $A(-2,-1)$ ,  $B(1,0)$ ,  $C(4,3)$  และ  $D(1,2)$  เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
7.  $A(-4,1)$ ,  $B(-5,-4)$ ,  $C(1,-2)$  และ  $D(x,y)$  เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน  $ABCD$  จงหาพิกัดของจุด  $D$

### 3.1.5 เส้นตั้งฉาก

**ทฤษฎีบท 4** เส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกับแกน  $Y$  จะตั้งฉากกันก็ต่อเมื่อ ผลคูณของความชันของเส้นตรงทั้งสองเท่ากับ  $-1$



**แบบฝึกหัด**

1. จงแสดงว่าจุด  $A(-4,3)$ ,  $B(-1,2)$  และ  $C(2,11)$  เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. จงบอกความชันของเส้นตรงที่กำหนดให้ และความชันของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรงที่กำหนดให้

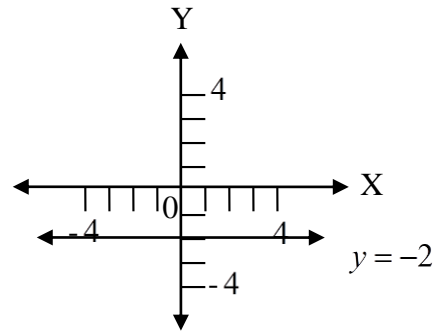
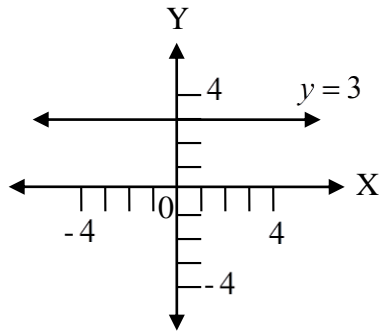
สมการเส้นตรง	ความชันของสมการเส้นตรง	ความชันของเส้นตั้งฉาก
1) ผ่านจุด $(3,2)$ และ $(1,-4)$		
2) ผ่านจุด $(0,0)$ และ $(-3,4)$		
3) ผ่านจุด $(-2,-1)$ และ $(-3,1)$		

3. เส้นตรงผ่านจุด  $(k,7)$  และ  $(-3,-2)$  ตั้งฉากกับเส้นตรงผ่านจุด  $(3,2)$  และ  $(1,-4)$  จงหาค่า  $k$

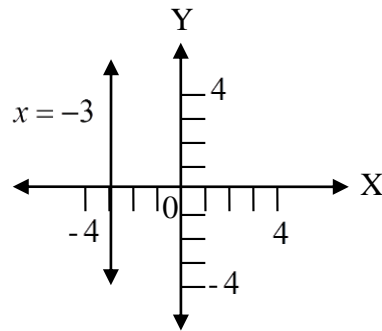
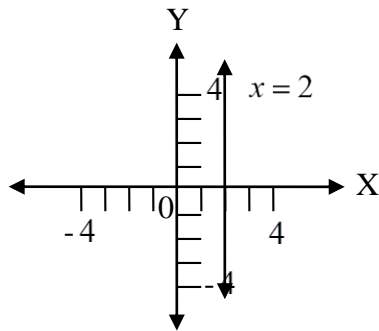
4. จุด  $A(2,5)$ ,  $B(2,9)$ ,  $C(6,9)$  และ  $D(6,5)$  เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม จงแสดงว่าเส้นทแยงมุมทั้งสองของรูปสี่เหลี่ยมตั้งฉากซึ่งกันและกัน

### 3.1.6 ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรง

1) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $X$  คือ  $\{(x, y) | y=b\}$  เช่น



2) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน  $Y$  คือ  $\{(x, y) | x=a\}$  เช่น



3) ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่ไม่ขนานกับแกน  $X$  และไม่ขนานกับแกน  $Y$

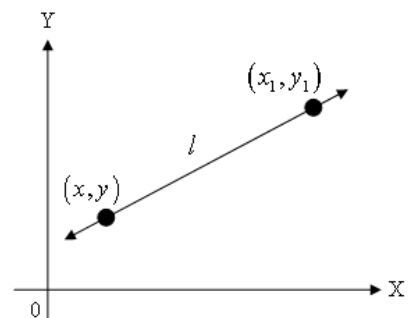
ถ้า  $(x, y)$  เป็นจุดอื่นๆ บนเส้นตรง  $l$  จะได้

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

สรุป ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน  $m$  และผ่านจุด  $(x_1, y_1)$  คือ

ความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน  $m$  และผ่านจุด  $(x_1, y_1)$  คือ

$$\{(x, y) | y - y_1 = m(x - x_1)\}$$



รูปทั่วไปของสมการเส้นตรง คือ  $Ax + By + C = 0$

#### แบบฝึกหัด

1. ข้อความต่อไปนี้ถูกหรือผิด

1) เส้นตรง  $y=3$  ผ่านจุด  $(-5, 3)$

2)  $(-1, -2)$  อยู่บนเส้นตรง  $x=-1$

3) เส้นตรง  $x - y + 2 = 0$  ผ่านจุด  $(1, 3)$

4)  $(0, 1)$  อยู่บนเส้นตรง  $3x + 2y + 2 = 0$

5) เส้นตรง  $2x - 3y = 1$  ไม่ผ่านจุด  $(2, 1)$

6)  $(2, -1)$  ไม่อยู่บนเส้นตรง  $y = x - 1$

2. จงหาความสัมพันธ์ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงตามสมบัติที่กำหนดให้ต่อไปนี้

- 1) ขนานกับแกน  $X$  และอยู่เหนือแกน  $X$  เป็นระยะ 5 หน่วย
- 2) ขนานกับแกน  $X$  และอยู่ใต้แกน  $X$  เป็นระยะ  $\frac{1}{2}$  หน่วย
- 3) ขนานกับแกน  $X$  และผ่านจุด  $(1, -2)$
- 4) ขนานกับแกน  $Y$  และอยู่ทางซ้ายแกน  $Y$  เป็นระยะ 3 หน่วย
- 5) ขนานกับแกน  $Y$  และอยู่ทางขวาแกน  $Y$  เป็นระยะ  $2\frac{4}{5}$  หน่วย
- 6) ขนานกับแกน  $Y$  และอยู่ห่างจากจุด  $(-2, 0)$  เป็นระยะ 5 หน่วย
- 7) ที่มีความชันเท่ากับ 3 และผ่านจุด  $(1, 2)$

8) ที่มีความชันเท่ากับ  $-2$  และผ่านจุด  $(-1, 1)$

9) ผ่านจุด  $(-4, 5)$  และ  $(-2, -2)$

10) ผ่านจุด  $(-1, 1)$  และ  $(3, -2)$

11) ผ่านจุด  $(-1, 0)$  และขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(1, 2)$  และ  $(-3, 3)$

12) ผ่านจุด  $(-2, -1)$  และขนานกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(-5, 0)$  และ  $(-3, 3)$

13) ผ่านจุด  $(-1, 0)$  และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(1, 2)$  และ  $(-3, 3)$

14) ผ่านจุด  $(-2, -1)$  และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(-5, 0)$  และ  $(-3, 3)$

15) ผ่านจุด  $(3, -1)$  และตั้งฉากกับเส้นตรงซึ่งผ่านจุด  $(-1, 1)$  และ  $(-1, -4)$



พิจารณาความสัมพันธ์  $\{(x, y) \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$  ซึ่งมีกราฟเป็นเส้นตรงที่มีความชัน  $m$  และผ่านจุด  $(x_1, y_1)$

จากสมการ  $y - y_1 = m(x - x_1)$  เมื่อนำมากระจายและจัดรูปใหม่จะได้

$$y - y_1 = mx - mx_1$$

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

เนื่องจาก  $m, x_1$  และ  $y_1$  ต่างก็เป็นค่าคงตัว ถ้าให้  $c = -mx_1 + y_1$  จะเขียนสมการได้ดังนี้

$$y = mx + c \quad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

← ความชันของเส้นตรง

และพิจารณาสมการ  $Ax + By + C = 0$  เมื่อ  $A \neq 0$  และ  $B \neq 0$

จากสมการ  $Ax + By + C = 0$  เมื่อนำมาจัดรูปใหม่ จะได้  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$

← ความชันของเส้นตรง

**ควรรู้** ถ้าเส้นตรงตัดแกน  $X$  ที่จุด  $(a, 0)$  เรียก  $a$  ว่าระยะตัดแกน  $X$  (  $x$  - intercept)  
 ถ้าเส้นตรงตัดแกน  $Y$  ที่จุด  $(0, b)$  เรียก  $b$  ว่าระยะตัดแกน  $Y$  (  $y$  - intercept)



**แบบฝึกหัด**

1. จงจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป  $y = mx + c$  และบอกความชัน ระยะตัดแกน  $X$  และแกน  $Y$

สมการ	y = mx + c	ความ ชัน	ระยะตัดแกน X	ระยะตัดแกน Y
1) $x + y - 5 = 0$				
2) $4x + 2y + 3 = 0$				
3) $5x - y + 1 = 0$				
4) $x - 3y = 5$				
5) $\frac{2}{3}x + \frac{3}{2}y = 4$				
6) $3y + 2 = 0$				
7) $x = 4$				

2. กำหนดให้

$$l_1 : 2x + y = 8$$

$$l_2 : 2x - 3y - 6 = 0$$

$$l_3 : y = \frac{2}{3}x + 8$$

$$l_4 : y = 6 - 2x$$

เส้นตรงใดต่อไปนี้ ขนานกัน

**สรุปว่า** เราสามารถหาความชันได้โดย

ข้อมูลที่กำหนดให้	ความชัน ( $m$ )
เส้นตรงผ่านจุด $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$	$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
$y = mx + c$	$m =$ สัมประสิทธิ์ของ $x$
$Ax + By + C = 0$	$m = -\frac{A}{B}$



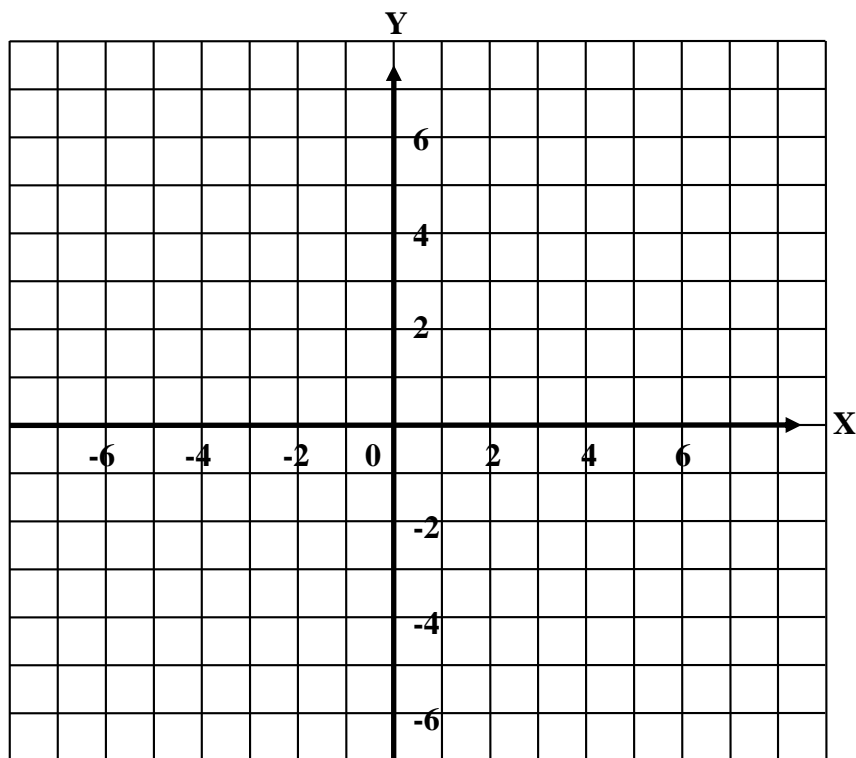
3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(2,1)$  และขนานกับเส้นตรง  $y = 6 - 2x$

4. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง  $x - 3y - 5 = 0$  และผ่านจุด  $(-1,4)$

5. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด  $(3,-2)$  และตั้งฉากกับเส้นตรง  $y = \frac{2}{3}x + 8$

6. จงหาสมการเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง  $x + 3y + 1 = 0$  และผ่านจุด  $(-2,-2)$

จงเขียนกราฟของ  $2x - 3y + 1 = 0$  และ  $x + y - 2 = 0$  และหาพิกัดของกราฟทั้งสอง



7. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง  $y = \frac{2}{3}x + 8$  และผ่านที่เส้นตรง  $2x - 3y + 1 = 0$  ตัดกับเส้นตรง  $x + y - 2 = 0$

8. จงหาสมการที่ผ่านจุดตัดของเส้นตรง  $x - 7y - 11 = 0$  และ  $3x + 5y - 7 = 0$  และตั้งฉากกับเส้นตรง  $x + 3y = 8$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ  $-\frac{2}{3}$  และมีระยะตัดแกน  $Y$  เท่ากับ 11

10. ให้  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 0)$  และ  $C(5, 4)$  เป็นจุดยอดทั้งสามของสามเหลี่ยม  $ABC$  สมการของเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ 1 และผ่านจุดตัดกันของเส้นมัธยฐานของสามเหลี่ยม  $ABC$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (Ent'38)

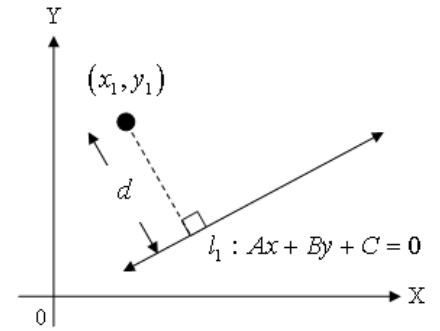
11. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(-1, 2)$  วงกลมนี้มีเส้นตรงลากมาสัมผัสที่จุด  $(-2, 4)$  จงหาสมการเส้นสัมผัสนี้

12. เส้นตรงที่ผ่านจุด  $(1, -3)$  ตั้งฉากและตัดกับเส้นตรง  $x + 2y - 5 = 0$  ที่จุดใด

### 3.1.6 ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับจุด

**ทฤษฎีบท 5** ระยะระหว่างเส้นตรง  $Ax + By + C = 0$  กับจุด  $(x_1, y_1)$

$$\text{เท่ากับ } d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ หน่วย}$$



#### แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะห่างระหว่างกราฟของสมการกับจุดที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1)  $4x + 3y + 7 = 0$  ,  $(1, -2)$

2)  $12x - 5y = 2$  ,  $(-2, 2)$

3)  $y = 5 - x$  ,  $(2, 3)$

4)  $y = 1$  ,  $(0, 0)$

2. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด  $(3, -1)$  และสัมผัสกับเส้นตรง  $x + y = 1$  อยากทราบว่ารัศมีของวงกลมยาวกี่หน่วย

3. ระยะทางที่สั้นที่สุดจาก  $(0,0)$  ไปยังเส้นตรง  $4x + 3y = 10$  เป็นระยะทางกี่หน่วย

4. จงหาค่า  $k$  ที่ทำให้จุด  $(3,5)$  อยู่ห่างจากเส้นตรง  $12x - 5y + k = 0$  เป็นระยะทาง 3 หน่วย

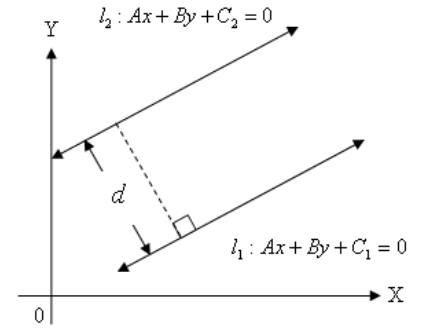
5. จงหาจุดบนแกน  $X$  ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง  $4x + 3y + 4 = 0$  เป็นระยะทาง 3 หน่วย

6. จงหาจุดบนแกน  $Y$  ซึ่งอยู่ห่างจากเส้นตรง  $x - y - 5 = 0$  เป็นระยะทาง  $\frac{5}{\sqrt{2}}$  หน่วย

**ทฤษฎีบท 6** ระยะระหว่างเส้นตรง  $Ax + By + C_1 = 0$  และ

เส้นตรง  $Ax + By + C_2 = 0$

$$\text{เท่ากับ } d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ หน่วย}$$



**แบบฝึกหัด**

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1)  $3x + 4y + 11 = 0$  ,  $3x + 4y + 1 = 0$

2)  $12x - 5y + 11 = 0$  ,  $12x - 5y = 2$

3)  $2x - 3y - 13 = 0$  ,  $4x - 6y + 26 = 0$

4)  $y = 2x$  ,  $4x - 2y - 3 = 0$

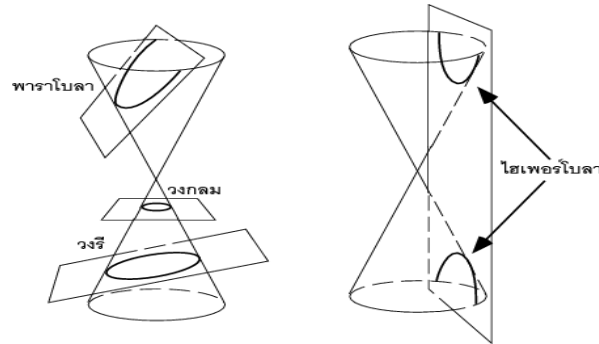
2. วงกลมวงหนึ่งสัมผัสกับเส้นตรง  $3x - 4y - 5 = 0$  และ  $3x - 4y + 15 = 0$  อยากทราบว่ารัศมีของวงกลมยาวกี่หน่วย

3. จงหาสมการของเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง  $3x - 4y - 5 = 0$  และอยู่ห่างจากเส้นตรงนี้ 1 หน่วย
4. จงหาสมการของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง  $8x + 15y - 3 = 0$  และอยู่ห่างจากจุด  $15x - 8y + 3 = 0$  เป็นระยะ 2 หน่วย
5. เส้นตรงที่ลากผ่านจุด  $(2, 8)$  และขนานกับเส้นตรง  $4x - 3y + 20 = 0$  จะอยู่ห่างจากเส้นตรง  $8x - 6y - 1 = 0$  เป็นระยะทางกี่หน่วย
6. จงหาสมการเส้นตรงที่ขนานและอยู่กึ่งกลางระหว่างเส้นตรง  $y = 3x - 1$  กับเส้นตรง  $3x - y + 2 = 0$



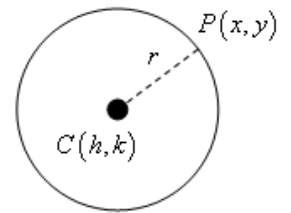
### 3.2 ภาคตัดกรวย (Conic Section)

คือรูปในระนาบที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ภาคตัดกรวยที่จะศึกษาเกิดจากระนาบที่ไม่ผ่านจุดยอดของกรวยดังแสดงในรูป เมื่อระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย ระนาบตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงกลม** (circle) เมื่อระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **วงรี** (ellipse) เมื่อระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว ได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **พาราโบลา** (parabola) และเมื่อระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้างได้ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า **ไฮเพอร์โบลา** (hyperbola)



#### 3.2.1 วงกลม

**บทนิยาม** **วงกลม** (circle) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุดๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม



รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

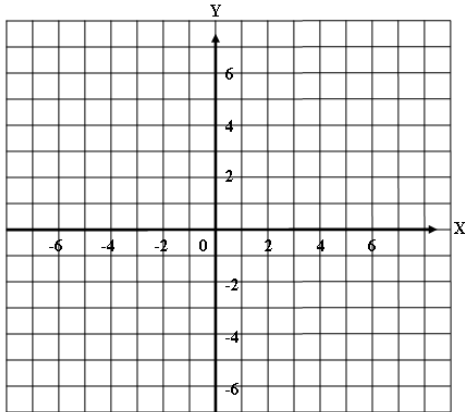
<b>สมการรูปแบบมาตรฐาน</b>	$x^2 + y^2 = r^2$	$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
<b>จุดศูนย์กลาง</b>	$(0, 0)$	$(h, k)$
<b>รัศมี</b>	$r$ หน่วย	$r$ หน่วย
<b>กราฟ</b>		

**แบบฝึกหัด**

1. จงแสดงว่าสมการต่อไปนี้นี้เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

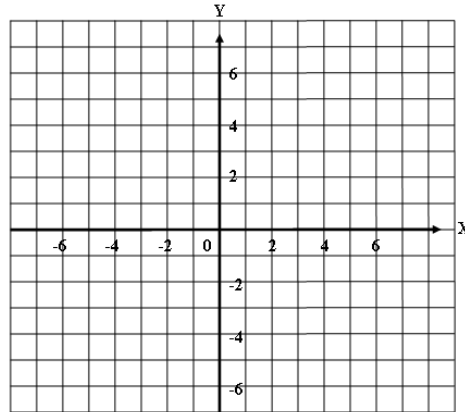
1)  $x^2 + y^2 = 1$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



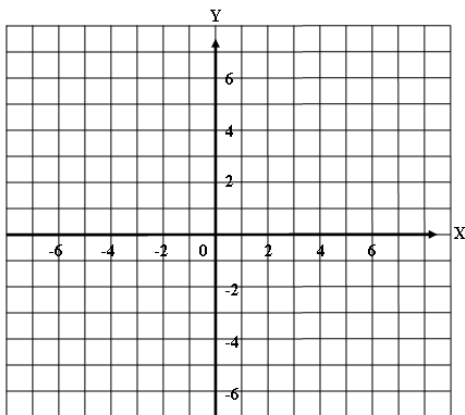
2)  $x^2 + y^2 - 16 = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



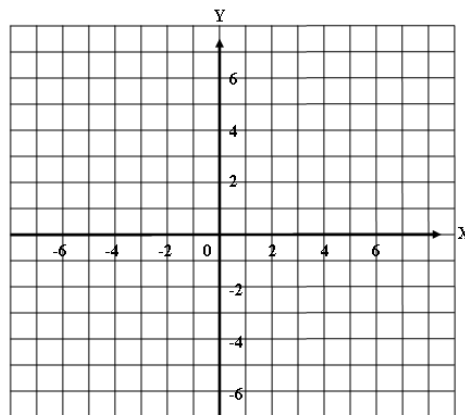
3)  $(x-2)^2 + y^2 = 25$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



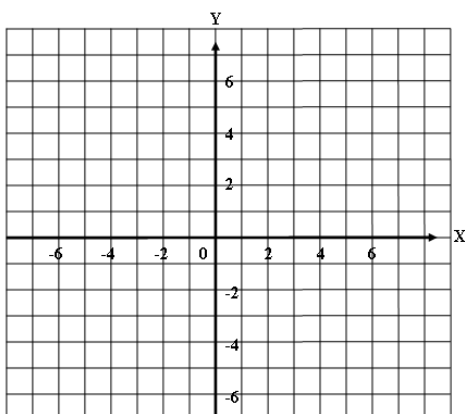
4)  $x^2 + (y+1)^2 = 4$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



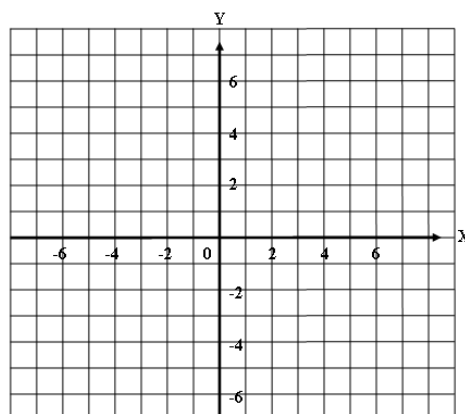
5)  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 9$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



6)  $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 8$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย

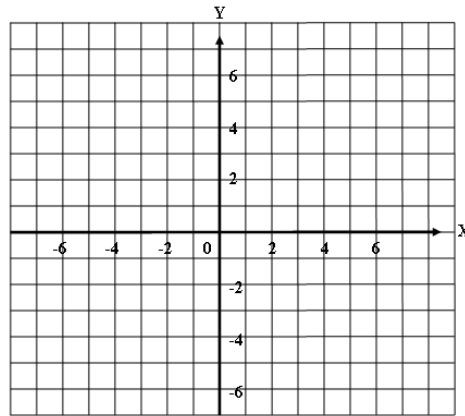
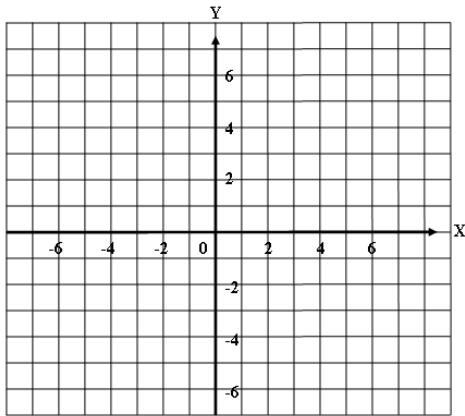


7)  $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$

8)  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6 = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย

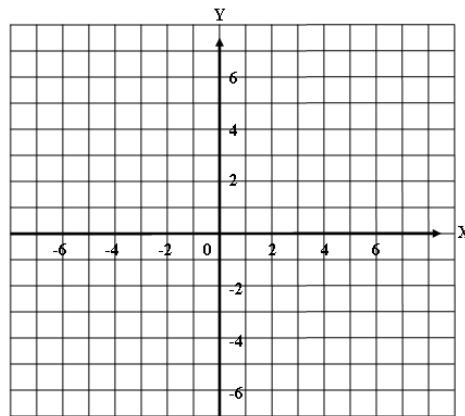
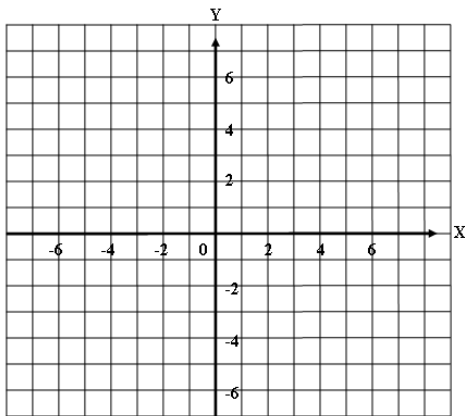
สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



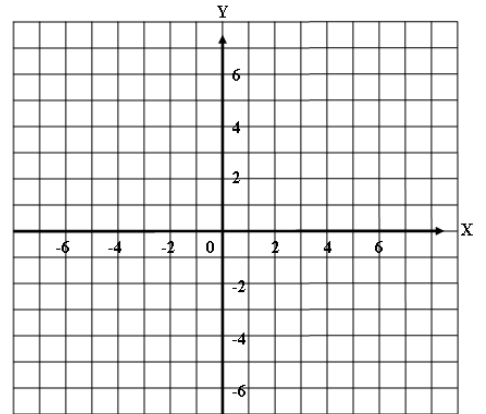
9)  $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$

10)  $x^2 + y^2 + x + 2y - \frac{5}{2} = 0$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย                      รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



2. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่นอกวงกลม  $x^2 + y^2 - 4 = 0$  แต่อยู่ภายในวงกลม  $x^2 + y^2 - 4y - 12 = 0$

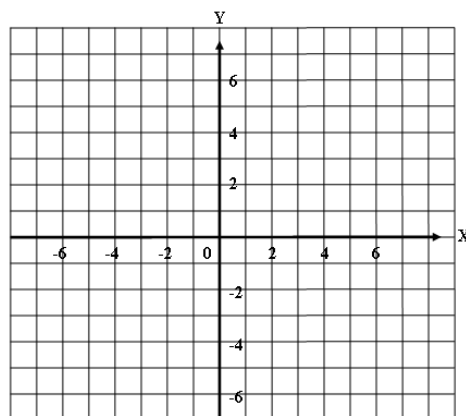
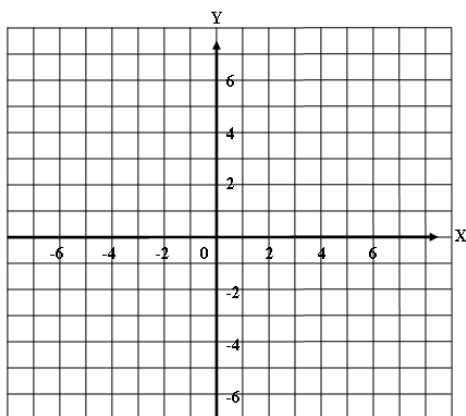


3. จงเขียนกราฟของอาณาบริเวณซึ่งกำหนดโดยเซตต่อไปนี้

1)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$

2)  $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 > 0\}$

สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_  
รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย    รัศมียาว \_\_\_\_\_ หน่วย



4. จงหาจุดตัดของกราฟของสมการ  $x + y = 1$  และ  $x^2 + y^2 - x - 3y = 0$

5. จงหาสมการของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(1, 2)$  และรัศมียาว 3 หน่วย
- 2) จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และรัศมียาว  $\sqrt{5}$  หน่วย

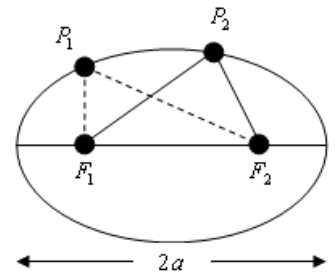
- 3) จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-1, -3)$  และสัมผัสแกน  $X$
- 4) จุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(-2, 5)$  และผ่านจุด  $(1, 9)$

- 5) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง คือ  $(-1, 3)$  และ  $(7, -5)$
- 6) วงกลมอยู่ในควอดรันต์ที่ 1 และสัมผัสแกน  $X$  และแกน  $Y$  รัศมียาว 4 หน่วย

6. จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่  $(1, -2)$  และสัมผัสกับเส้นตรง  $3x + 4y - 5 = 0$

### 3.2.2 วงรี

**บทนิยาม** **วงรี** (ellipse) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด  $F_1$  และ  $F_2$  ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยที่ค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของวงรี



$$F_1F_1 + F_1F_2 = F_2F_1 + F_2F_2 = \text{ค่าคงตัว } (2a)$$

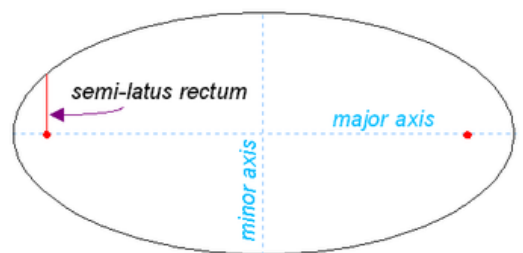
รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

	เมื่อ $a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	$(h,k)$
จุดยอด	$V_1(-a,0)$ และ $V_2(a,0)$	$V_1(h-a,k)$ และ $V_2(h+a,k)$
โฟกัส	$F_1(-c,0)$ และ $F_2(c,0)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$	$F_1(h-c,k)$ และ $F_2(h+c,k)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$
แกนเอก	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนโท	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนเอกที่ โฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนวงรี เรียกว่า **เลตัสเรกตัมของวงรี**

ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ  $\left| \frac{b^2}{a} \right|$

ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว  $\frac{2b^2}{a}$  หน่วย

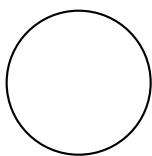


	เมื่อ $a > b > 0$ แกนเอกอยู่ในแนวนอน	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	$(h,k)$
จุดยอด	$V_1(0,-a)$ และ $V_2(0,a)$	$V_1(h,k-a)$ และ $V_2(h,k+a)$
โฟกัส	$F_1(0,-c)$ และ $F_2(0,c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$	$F_1(h,k-c)$ และ $F_2(h,k+c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 - b^2$
แกนเอก	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนโท	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

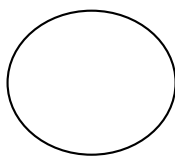
**บทนิยาม** ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) ของวงรี แทนด้วย  $e$  คือ อัตราส่วนของ  $c$  ต่อ  $a$   
 เมื่อ  $c^2 = a^2 - b^2$  นั่นคือ  $e = \frac{c}{a}$

ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 นั่นคือ  $0 < e < 1$

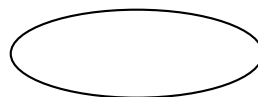
- ถ้า  $e$  มีค่าใกล้ 1 หรือ  $c$  มีค่าเกือบจะเท่ากับ  $a$  แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว)
- ถ้า  $e$  มีค่าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (มีรูปร่างเกือบจะกลม)



$e = 0.1$



$e = 0.5$



$e = 0.87$



$e = 0.95$

**แบบฝึกหัด**

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความเยื้องศูนย์กลาง ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท ของวงรี แล้วเขียนกราฟ

1)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

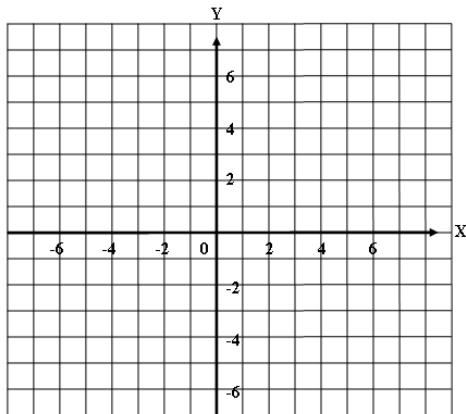
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



2)  $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

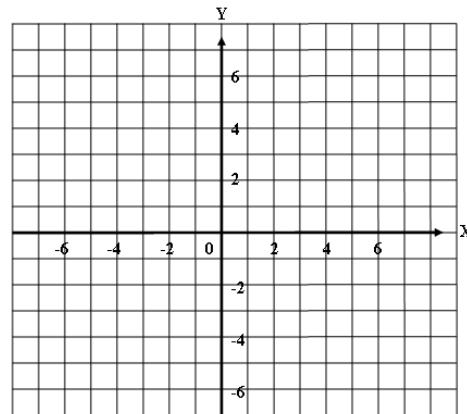
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



3)  $4x^2 + 9y^2 = 36$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

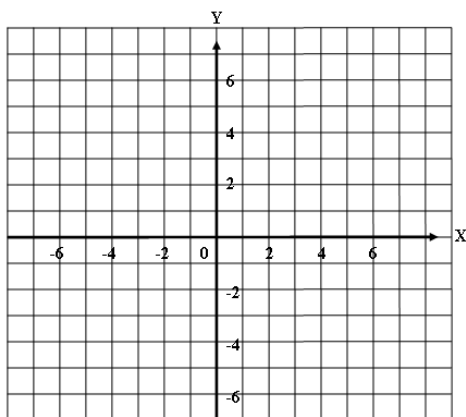
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



4)  $5(x+2)^2 + 6(y-3)^2 = 30$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

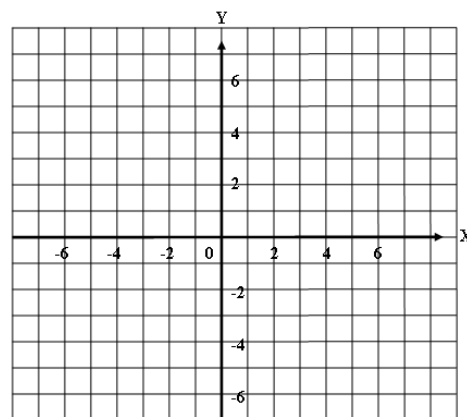
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลาง เท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย





5)  $25x^2 + 16y^2 = 400$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

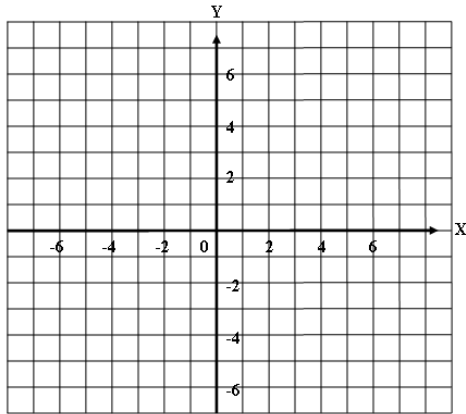
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



6)  $25x^2 + 4(y+1)^2 = 100$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

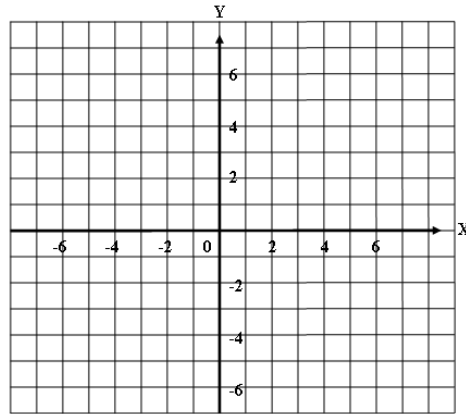
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



7)  $16x^2 + 25y^2 - 200y = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

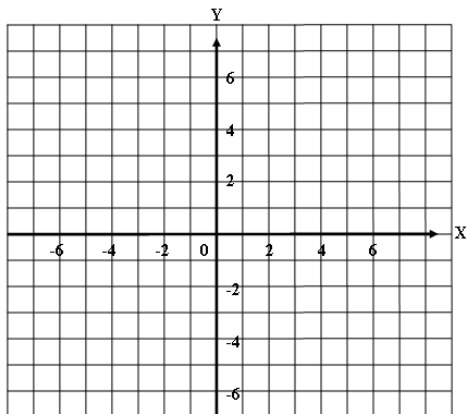
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



8)  $2x^2 + 11y^2 + 4x - 44y + 24 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

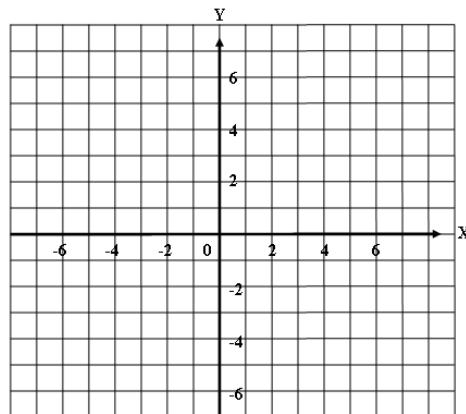
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



9)  $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

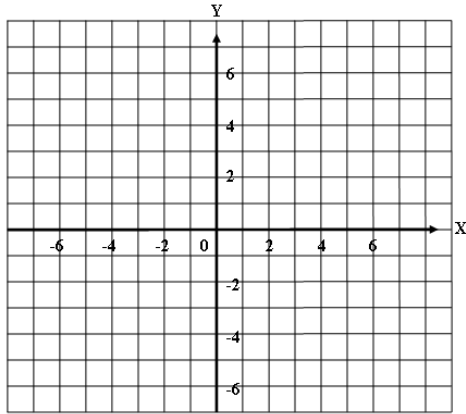
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



10)  $25x^2 + 16y^2 - 50x - 64y - 311 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

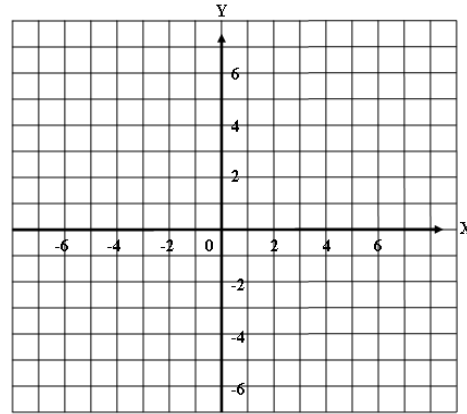
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ \_\_\_\_\_

แกนเอกยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนโทยาว \_\_\_\_\_ หน่วย



2. จงหาเส้นตรงผ่านจุดศูนย์กลางของวงรี  $4x^2 + 9y^2 - 48x + 72y + 144 = 0$  และตั้งฉากกับเส้นตรง  $3x + 4y - 5 = 0$

3. กำหนดสมการวงรี  $9x^2 + 5y^2 - 36x - 10y - 139 = 0$  จุด  $F_1$  และ  $F_2$  เป็นจุดโฟกัสของวงรี ให้  $L_1$  และ  $L_2$  เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกันมีความชันเท่ากับ  $\frac{4}{3}$  และผ่านจุด  $F_1$  และ  $F_2$  ตามลำดับ จงหาระยะระหว่างเส้นตรง  $L_1$  และ  $L_2$

4. จงหาสมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

- 1) จุดศูนย์กลาง  $(0,0)$  แกนเอกยาว 10 หน่วย 2) จุดศูนย์กลาง  $(0,0)$  แกนเอกยาว 6 หน่วย  
แกนโทยาวยาว 8 หน่วย และโฟกัสอยู่บน แกนโทยาวยาว 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บน  
แกน Y แกน X

3) โฟกัส  $(-3,0), (3,0)$  และ  
จุดยอด  $(-5,0), (5,0)$

4) โฟกัส  $(0,-4), (0,4)$  และ  
จุดยอด  $(0,-5), (0,5)$

5) โฟกัส  $(-3,1), (3,1)$  และแกนเอกยาว  
10 หน่วย

6) โฟกัส  $(-3,2), (-3,-6)$  และแกนโทยาว  
8 หน่วย

7) จุดปลายแกนเอก  $(-4, -1), (4, -1)$  และ  
ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย

8) จุดปลายแกนโท  $(-4, -1), (4, -1)$  และ  
ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 6 หน่วย

9) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ  $\frac{1}{4}$  และมี  
โฟกัส  $(-3, -2), (3, -2)$

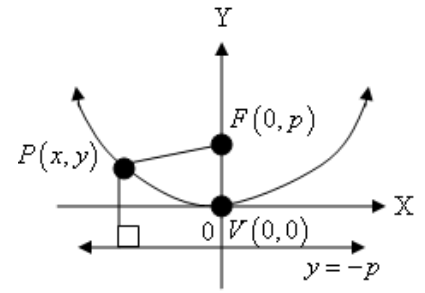
10) ความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  และมี  
จุดยอด  $(-1, 6), (-1, -4)$

11) โฟกัส  $(1, 1), (1, 3)$  และจุดยอดจุดหนึ่ง  
อยู่บนแกน Y

12) จุดยอด  $(7, -8), (7, 12)$  และผ่านจุด  $(1, 8)$

### 3.2.3 พาราโบลา

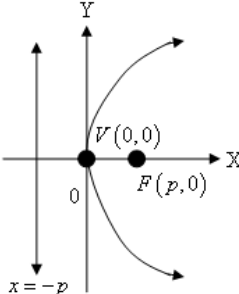
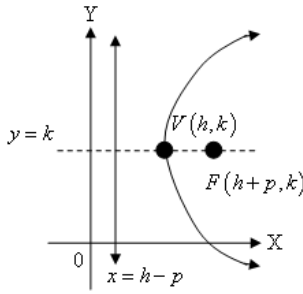
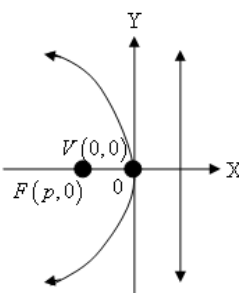
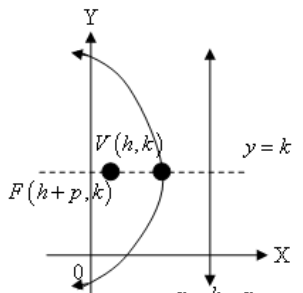
**บทนิยาม พาราโบลา** (parabola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุด  $F$  ที่ตั้งอยู่กับจุดหนึ่งและเส้นตรง  $l$  ที่ตั้งอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตั้งอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **โฟกัส** และเส้นตรงที่ตั้งอยู่กับที่นี้เรียกว่า **เส้นบังคับ** หรือ **ไดเรกตริกซ์** (directrix) ของพาราโบลา



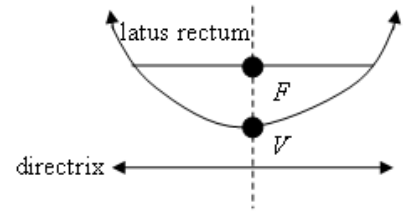
รูปแบบทั่วไปของสมการพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือเส้นโค้งคว่ำลง  $x^2 + Ax + By + C = 0$

เมื่อ $p > 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$x^2 = 4py$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(0,p)$	$F(h,k+p)$
ไดเรกตริกซ์	$y = -p$	$y = k - p$
แกนสมมาตร	$x = 0$	$x = h$
กราฟ		
เมื่อ $p < 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$x^2 = 4py$	$(x-h)^2 = 4p(y-k)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(0,p)$	$F(h,k+p)$
ไดเรกตริกซ์	$y = -p$	$y = k - p$
แกนสมมาตร	$x = 0$	$x = h$
กราฟ		

รูปแบบทั่วไปของสมการพาราโบลาที่เป็นเส้นโค้งหงายขึ้นหรือเส้นโค้งคว่ำลง  $y^2 + Ax + By + C = 0$

เมื่อ $p > 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดด้านขวา		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(p,0)$	$F(h+p,k)$
ไดเรกทริกซ์	$x = -p$	$x = h - p$
แกนสมมาตร	$y = 0$	$y = k$
กราฟ		
เมื่อ $p < 0$ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดด้านซ้าย		
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$y^2 = 4px$	$(y-k)^2 = 4p(x-h)$
จุดยอด	$V(0,0)$	$V(h,k)$
โฟกัส	$F(p,0)$	$F(h+p,k)$
ไดเรกทริกซ์	$x = -p$	$x = h - p$
แกนสมมาตร	$y = 0$	$y = k$
กราฟ		

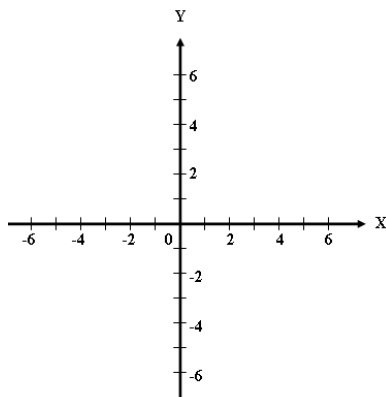
**เลตัสเรกตัม** (latus rectum) คือคอร์ดที่ตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา และผ่านโฟกัสของพาราโบลา (ส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายอยู่บนพาราโบลา เรียกว่า **คอร์ด** (chord) ของพาราโบลา) ความยาวของเลตัสเรกตัม ใช้วัด “ความกว้าง” ของพาราโบลา ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ  $|2p|$  ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว  $|4p|$  หน่วย



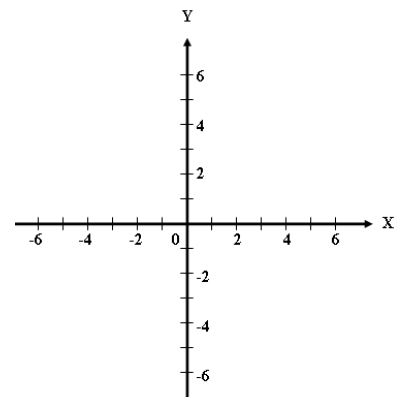
**แบบฝึกหัด**

1. จงหาจุดยอด จุดโฟกัส สมการไดเรกทริกซ์ และแกนสมมาตรของพาราโบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟอย่างคร่าวๆ

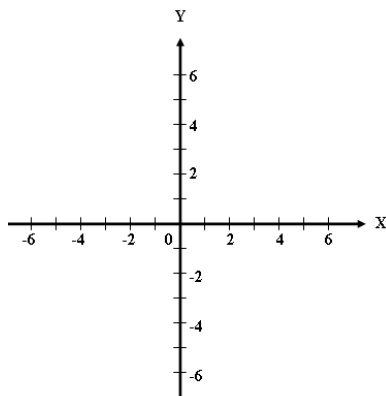
1)  $x^2 = 8y$



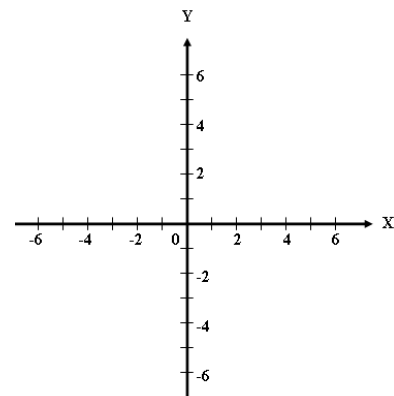
2)  $(x-3)^2 = 4y$



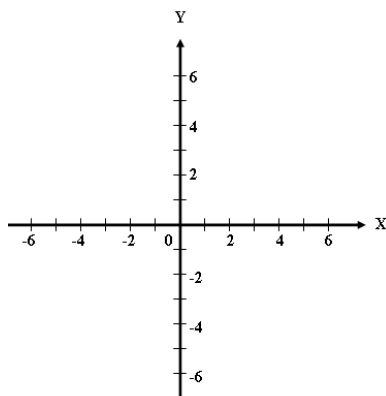
3)  $x^2 + 4y = 0$



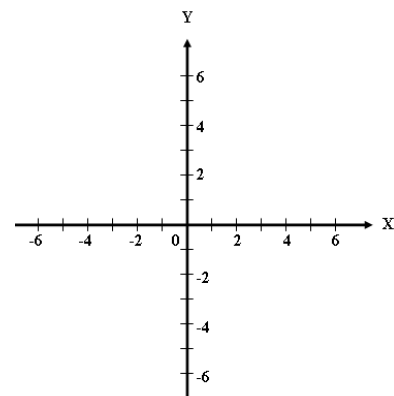
4)  $(x+1)^2 = -12(y-2)$



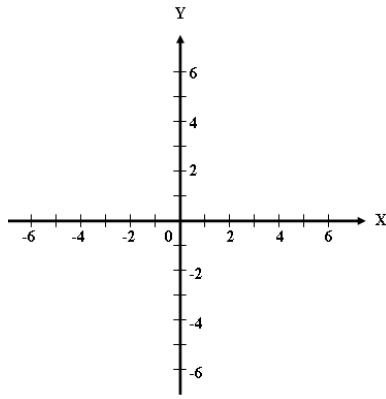
5)  $y^2 - 20x = 0$



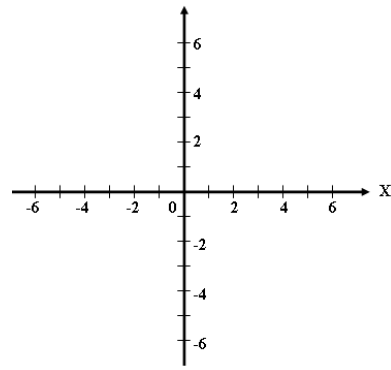
6)  $y^2 = 7(x+2)$



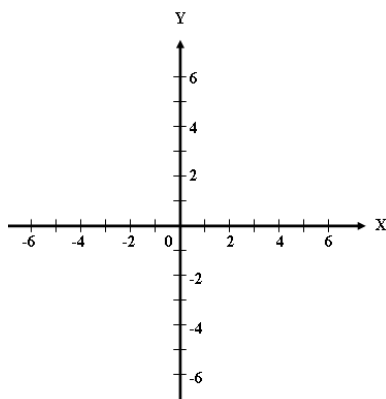
7)  $\frac{y^2}{8} + x = 0$



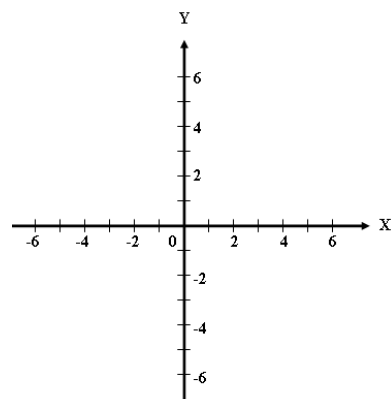
8)  $(y+1)^2 = -12(x+3)$



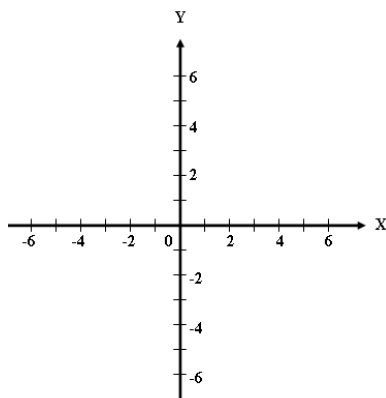
9)  $x^2 - 4y = 8$



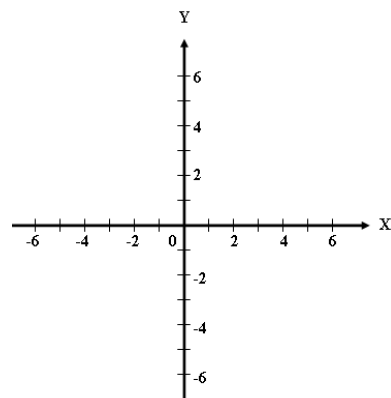
10)  $x^2 + 12y = 36$



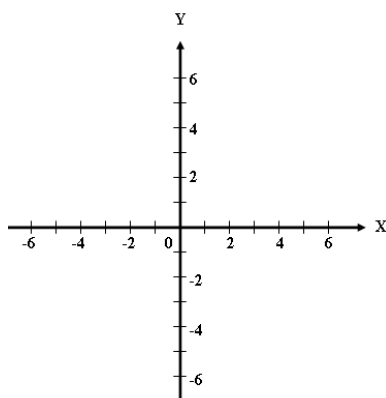
11)  $y^2 - 8x - 8 = 0$



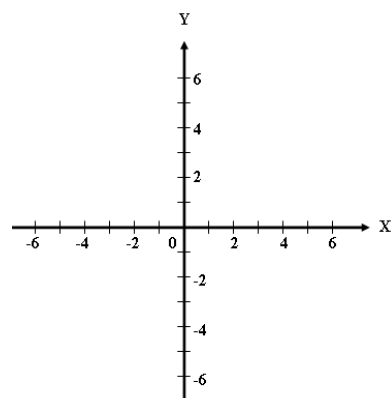
12)  $y^2 + 8x - 32 = 0$



13)  $x^2 + 4x - 8y + 28 = 0$

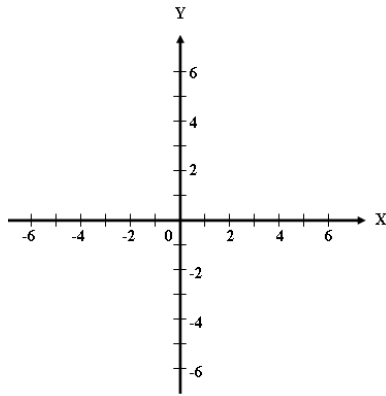


14)  $x^2 - 6x + 8y + 41 = 0$

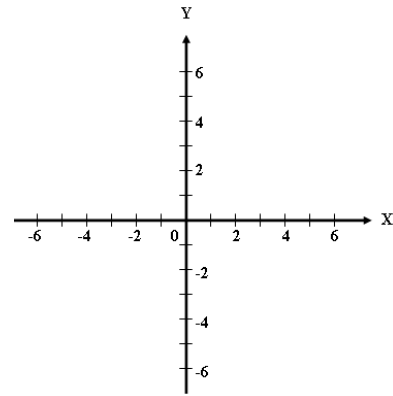




15)  $y^2 + 4y - 8x - 36 = 0$



16)  $y^2 - 10y + 4x + 17 = 0$



2. ให้  $A$  เป็นจุดยอดของพาราโบลา  $x^2 + 6x - 8y + 25 = 0$  และ  $B$  เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา  $y^2 + 4y - 6x - 8 = 0$  ระยะทาง  $AB$  เท่ากับกี่หน่วย

3. จงหาสมการพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

1) จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และ  
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(3,0)$

2) จุดยอดอยู่ที่จุด  $(0,0)$  และ  
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(0,-2)$

3) จุดยอดอยู่ที่จุด  $(1,3)$  และ  
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(1,4)$

4) จุดยอดอยู่ที่จุด  $(-2,2)$  และ  
จุดโฟกัสอยู่ที่จุด  $(-5,2)$

5) ไฮเพอร์โบลา คือ เส้นตรง  $x = -4$  และ  
โฟกัสอยู่ที่จุด  $(4,0)$

6) ไฮเพอร์โบลา คือ เส้นตรง  $y = 2$  และ  
โฟกัสอยู่ที่จุด  $(6,6)$

7) ไฮเพอร์โบลา คือ เส้นตรง  $y = -1$  และ  
โฟกัสอยู่ที่จุด  $(3,-5)$

8) จุดยอดอยู่ที่จุด  $(1,1)$  และไฮเพอร์โบลาที่ขนานกับ  $X$

4. จงเขียนสมการพาราโบลา ซึ่งมีแกน  $X$  เป็นแกนสมมาตร กราฟตัดแกน  $X$  ที่จุด  $(-4,0)$  ตัดแกน  $Y$  ที่  $(0,4)$  และ  $(0,-4)$

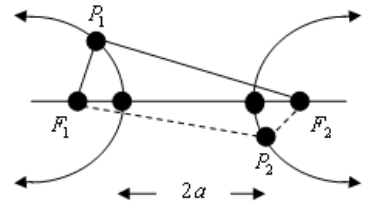
5. จงเขียนสมการพาราโบลา มีจุดโฟกัสอยู่ที่  $(1,2)$  เส้นไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน  $Y$  และจุดยอดอยู่บนเส้นตรง  $x - y + 2 = 0$

6. จงเขียนสมการพาราโบลา มีจุดยอดที่  $(2,3)$  และผ่านจุด  $(4,5)$  มีแกนขนานกับแกน  $X$

### 3.2.4 ไฮเพอร์โบลา

แม้ว่ารูปร่างของไฮเพอร์โบลากับวงรีจะแตกต่างกันอย่างสิ้นเชิง แต่บทนิยามและสมการของภาคตัดกรวยสองชนิดนี้คล้ายกัน โดยใช้ *ผลบวก* ของระยะทางจากโฟกัสทั้งสองนิยามวงรี ในขณะที่ไฮเพอร์โบลาใช้ *ผลต่าง*

**บทนิยาม** ไฮเพอร์โบลา (hiperbola) คือเซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใดๆ ไปยังจุด  $F_1$  และ  $F_2$  ที่ตรึงอยู่กับที่มีค่าคงตัว โดยที่ค่าคงตัวน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด จุดสองจุดที่ตรึงอยู่กับที่นี้เรียกว่า **โฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา

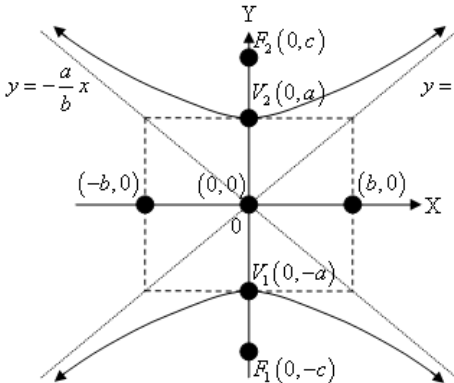
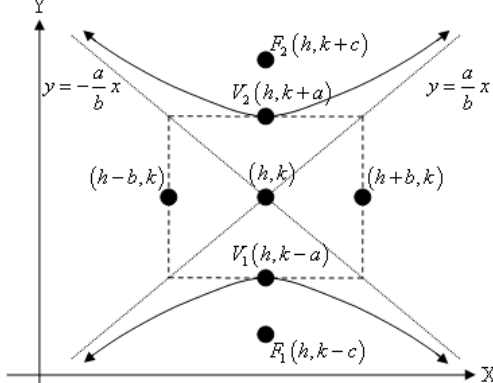


$$|PF_1 - PF_2| = |F_2F_1 - F_2F_2| = \text{ค่าคงตัว } (2a)$$

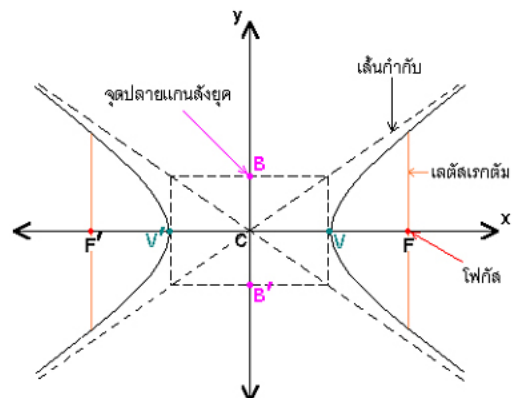
รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี  $Ax^2 - By^2 + Cx + Dy + E = 0$

	แกนตามขวางขนานกับแกน X	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	$(h,k)$
จุดยอด	$V_1(-a,0)$ และ $V_2(a,0)$	$V_1(h-a,k)$ และ $V_2(h+a,k)$
โฟกัส	$F_1(-c,0)$ และ $F_2(c,0)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$	$F_1(h-c,k)$ และ $F_2(h+c,k)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$
แกนตามขวาง	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนสังยุค	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

รูปแบบทั่วไปของสมการวงรี  $Ay^2 - Bx^2 + Cx + Dy + E = 0$

	แกนตามขวางขนานกับแกน Y	
สมการรูปแบบมาตรฐาน	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$
จุดศูนย์กลาง	$(0,0)$	$(h,k)$
จุดยอด	$V_1(0,-a)$ และ $V_2(0,a)$	$V_1(h,k-a)$ และ $V_2(h,k+a)$
โฟกัส	$F_1(0,-c)$ และ $F_2(0,c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$	$F_1(h,k-c)$ และ $F_2(h,k+c)$ โดยที่ $c^2 = a^2 + b^2$
แกนตามขวาง	$2a$ หน่วย	$2a$ หน่วย
แกนสังยุค	$2b$ หน่วย	$2b$ หน่วย
กราฟ		

ส่วนของเส้นตรงที่ตั้งฉากกับแกนตามขวางที่ โฟกัส และมีจุดปลายทั้งสองด้านบนไฮเพอร์โบลา เรียกว่า **เลตัสเรกตัมของไฮเพอร์โบลา** ซึ่งจุดปลายจุดหนึ่งของเลตัสเรกตัมถึงโฟกัส เท่ากับ  $\left| \frac{b^2}{a} \right|$  ดังนั้น เลตัสเรกตัมยาว  $\left| \frac{2b^2}{a} \right|$  หน่วย



**แบบฝึกหัด**

1. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนลึงยุค และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนกราฟอย่างคร่าวๆ

1)  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_

2)  $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

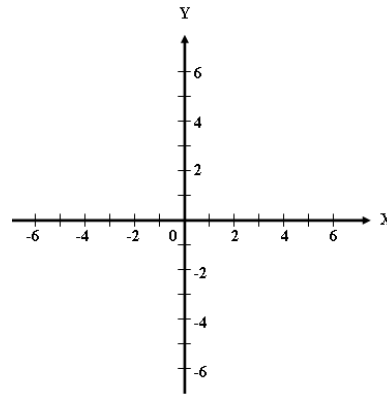
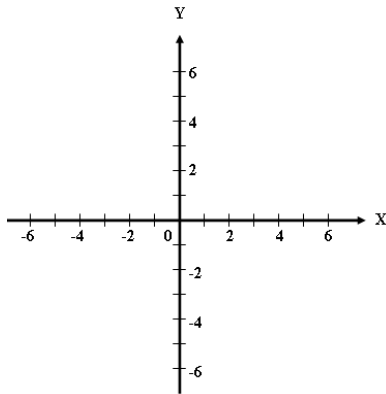
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



3)  $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_

4)  $\frac{(y+1)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

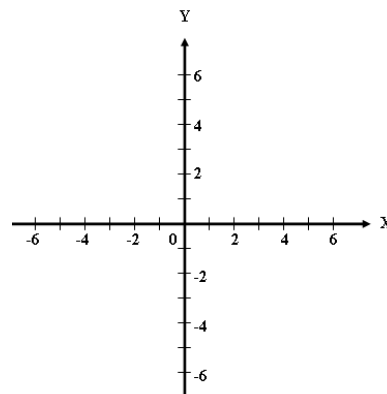
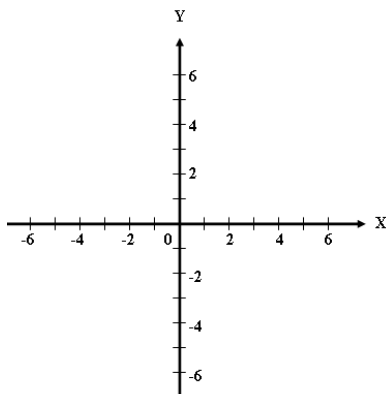
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



5)  $9x^2 - 4y^2 = 36$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

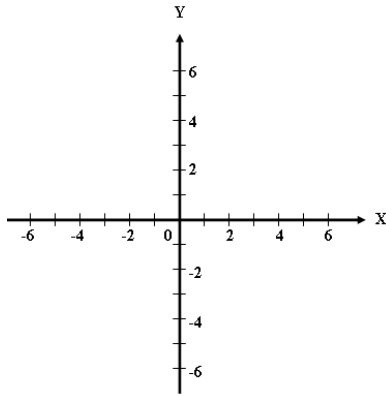
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



6)  $9(x+2)^2 - 25y^2 = 225$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

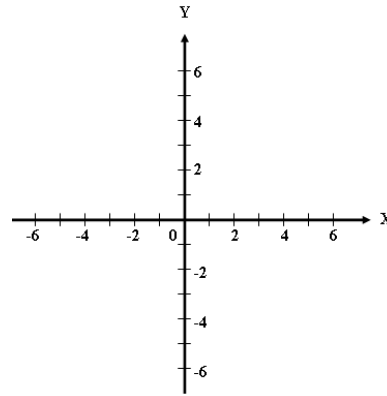
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



7)  $y^2 - 3x^2 - 3 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

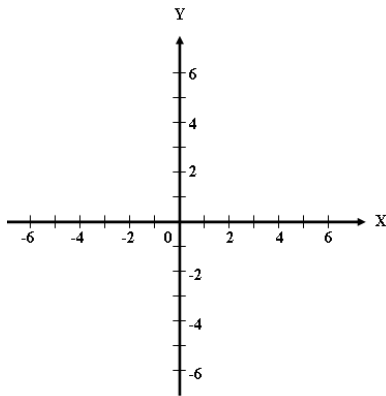
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



8)  $9(y-2)^2 - 7(x+3)^2 = 63$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

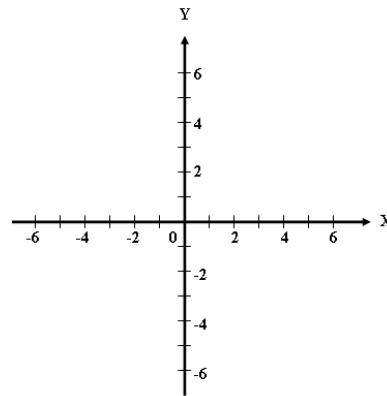
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



9)  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 80 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

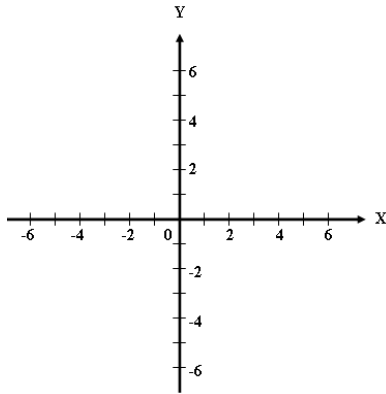
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



10)  $4x^2 - 5y^2 + 8x + 20y - 36 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

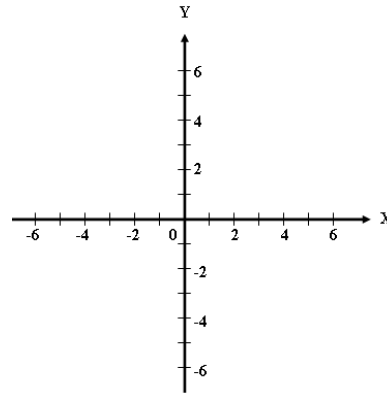
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



11)  $16y^2 - 9x^2 + 36x - 32y - 164 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

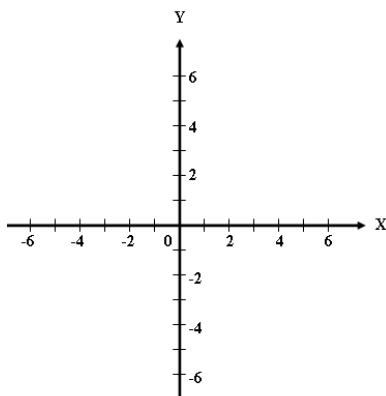
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_



12)  $4y^2 - 9x^2 + 18x - 16y - 29 = 0$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

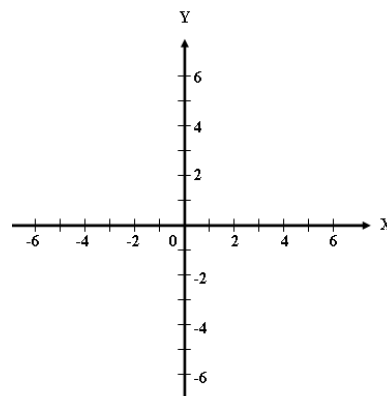
จุดยอดอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

จุดโฟกัสอยู่ที่จุด \_\_\_\_\_

แกนตามขวางยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

แกนลึงยุคยาว \_\_\_\_\_ หน่วย

เส้นกำกับ คือ \_\_\_\_\_





2. จงหาสมการของไฮเพอร์โบล่าที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

- 1) จุดยอด คือจุด  $(-5,0), (5,0)$  และแกนสังยุคยาว 8 หน่วย
- 2) โฟกัส คือจุด  $(0,-6), (0,6)$  และจุด  $(0,-2), (0,2)$  เป็นจุดยอด
- 3) โฟกัส คือจุด  $(-5,0), (5,0)$  และแกนตามขวางยาว 6 หน่วย
- 4) จุดยอด คือจุด  $(0,-6), (0,6)$  และไฮเพอร์โบล่าผ่านจุด  $(-5,9)$
- 5) จุดยอด คือจุด  $(-1,0), (1,0)$  และเส้นกำกับ คือ  $y = \pm 5x$
- 6) โฟกัส คือจุด  $(0,-8), (0,8)$  และเส้นกำกับ คือ  $y = \pm \frac{1}{2}x$

7) จุดยอด คือจุด  $(-1,2), (5,2)$  และ  
แกนสังยุคยาว 6 หน่วย

8) โฟกัส คือจุด  $(-1,-6), (-1,0)$  และ  
แกนสังยุคยาว 8 หน่วย

9) จุดยอด คือจุด  $(2,2), (2,6)$  และ  
โฟกัส คือจุด  $(2,1), (2,7)$

10) จุดยอด คือจุด  $(1,-2), (1,2)$  และ  
เส้นกำกับ คือ  $y = \pm \frac{1}{2}x$

11) จุดศูนย์กลางที่จุด  $(3,4)$  , มีจุดยอดจุดหนึ่ง  
ที่จุด  $(3,9)$  และมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งที่  $(3,11)$

12) มีจุดศูนย์กลางและจุดยอดเดียวกันกับวงรีที่สมการ  
 $\frac{(x-4)^2}{4} - \frac{y^2}{36} = 1$  และโฟกัสทั้งสองห่างกัน 18 หน่วย