

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

เอกสารประกอบการเรียน

รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 และคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1

เรื่อง

ตรรกศาสตร์ (LOGIC)

สำหรับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

- | | |
|------------------------------|-----------------|
| ▪ ประพจน์ | ▪ สัจนิรันดร์ |
| ▪ การเชื่อมประพจน์ | ▪ การอ้างเหตุผล |
| ▪ การหาค่าความจริงของประพจน์ | ▪ ประโยคเปิด |
| ▪ ประพจน์ที่สมมูลกัน | ▪ ตัวบ่งปริมาณ |

ชื่อ _____ ชั้น _____ เลขที่ _____

คำนำ

เอกสารประกอบการเรียนการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน 1 (ค31101) และคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 1 (ค31201) เล่มนี้ จัดทำตามผลการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 เรื่อง ตรรกศาสตร์ โดยได้รวบรวมเนื้อหาและโจทย์แบบฝึกหัดต่าง ๆ เพื่อฝึกทักษะการคิดอย่างมีระบบ มีเหตุผล และให้นักเรียนมีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนการสอน

ในการเรียบเรียงเอกสารเล่มนี้ มุ่งเน้นให้นักเรียนทำความเข้าใจอย่างเป็นระบบ โดยทำความเข้าใจไปที่ละขั้นตอน และส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักคิดและแก้ปัญหาด้วยตนเอง

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่า เอกสารประกอบการเรียนเล่มนี้ จะเป็นประโยชน์ในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
คำนำ	ก
สารบัญ	ข
บทที่ 2 ตรรกศาสตร์	1
2.1 ประพจน์	1
2.2 การเชื่อมประพจน์	3
2.3 การหาค่าความจริงของประพจน์	5
2.4 ประพจน์ที่สมมูลกัน	25
2.5 สัจนิรันดร์	33
2.6 การอ้างเหตุผล	40
2.7 ประโยคเปิด	47
2.8 ตัวบ่งปริมาณ	48
บรรณานุกรม	62

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์ เป็นวิชาที่กล่าวถึงหลักเกณฑ์การให้เหตุผล ในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ ไม่ว่าจะสาขาใดก็ตาม จะพบว่า เริ่มต้นจะต้องได้เรียนรู้ถึงคำใหม่ ๆ ในสาขาวิชานั้น คำใหม่เหล่านี้บางคำก็จำเป็นต้องให้ความหมายที่ชัดเจน โดยกำหนด “บทนิยาม” ของคำ ๆ นั้น แต่ในบางคำก็ไม่จำเป็นต้องนิยามคำนั้น เพราะนิยามไปก็ไม่มีประโยชน์ เช่น คำว่า เซต จุด เส้นตรง เป็นต้น เมื่อพูดถึงคำเหล่านี้ทุกคนจะเข้าใจความหมายตรงกัน โดยไม่จำเป็นต้องนิยาม เราเรียกคำเหล่านี้ว่า “คำนิยาม” นอกจากจะพบคำใหม่ทั้งคำนิยามและคำอธิบายแล้ว ก็จะมีพบสิ่งที่สำคัญอีกประการหนึ่งคือ ข้อความที่ยอมรับหรือมีข้อตกลงว่าเป็นความจริง เราเรียกข้อความเหล่านี้ว่า “สัจพจน์” และจากบทนิยาม อธิบาย และสัจพจน์ เราสามารถพิสูจน์ข้อความใหม่ๆ ได้อีกมากมาย ข้อความที่พิสูจน์ได้นี้เรียกว่า “ทฤษฎีบท” ตรรกศาสตร์จะมีบทบาทตรงช่วงนี้มาก กล่าวคือเป็นเครื่องมือในการพิสูจน์ทฤษฎีบทนั่นเอง

ตรรกศาสตร์เริ่มแรกเป็นสาขาหนึ่งของวิชาปรัชญา ซึ่งมีมาตั้งแต่สมัยของ Aristotle และได้พัฒนาขึ้นเรื่อย ๆ มา และในระยะหลังได้นำวิธีการบางอย่างมาใช้เพื่อทำให้การศึกษาตรรกศาสตร์ได้ง่ายขึ้น วิธีการนั้นคือ การใช้สัญลักษณ์ (symbol) แทนข้อความ (statement) และเรียกตรรกศาสตร์ที่ใช้สัญลักษณ์แทนข้อความนี้ว่าตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ (symbolic logic) ซึ่งเราจะได้ศึกษาตรรกศาสตร์ในแง่นี้นั่น

2.1 ประพจน์ (STATEMENT)

ค่าความจริง

“

ข้อความที่เป็นจริง

หมายถึง ข้อความที่มีค่าความจริงเป็นจริง เขียนแทนด้วย **T** (true)

ข้อความที่เป็นเท็จ

หมายถึง ข้อความที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ เขียนแทนด้วย **F** (false)

”

ในการพิจารณาว่าคำพูดหรือข้อความใดเป็นจริงหรือเป็นเท็จนั้น จะเกี่ยวข้องกับวิชาตรรกศาสตร์ เพราะในวิชาตรรกศาสตร์ เราจะศึกษาว่าคำพูดหรือข้อความในลักษณะใดที่เป็นจริง คำพูดหรือข้อความลักษณะใดที่เป็นเท็จ ดังนั้น เราต้องพิจารณาถึงลักษณะของข้อความที่ใช้ในโลกนี้ว่า มีลักษณะใดบ้าง ซึ่งในทางตรรกศาสตร์ เราจะแบ่งข้อความออกเป็น 2 ลักษณะ คือ **ข้อความที่บ่งบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ**

ซึ่งข้อความในลักษณะนี้เราเรียกว่า “ประพจน์” กับข้อความที่เราไม่สามารถบ่งบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ข้อความในลักษณะเช่นนี้ ไม่เรียกว่า ประพจน์

ประพจน์

ประพจน์ (statement) คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ประโยคที่ไม่เป็นประพจน์ ได้แก่ ประโยคคำถาม ประโยคคำสั่ง ประโยคข้อร้อง ประโยคอุทาน ประโยคที่มีตัวแปรที่เมื่อแทนตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วทำให้ประโยคเป็นจริงบ้าง

แบบฝึกหัดที่ 1

❶ พิจารณาประโยคต่อไปนี้ ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องว่างที่เหมาะสม

ข้อ	ข้อความ	เป็นประพจน์	ไม่เป็นประพจน์
1	ดาวพุธเป็นดาวเคราะห์		
2	จังหวัดเชียงใหม่อยู่ทางภาคใต้ของประเทศไทย		
3	ฝนตกหรือเปล่า		
4	อย่าเดินลัดสนาม		
5	ช่วยด้วย		
6	กรุณาเปิดหน้าต่างด้วย		
7	$9 \neq 3$		
8	$17 + 8 = 25$		
9	โปรดให้อภัยในความไม่สะดวก		
10	เป็นจำนวนอตรรกยะ		
11	เซตว่างเป็นสับเซตของทุกเซต		
12	อยากไปเที่ยวเหลือเกิน		
13	เดือนสิงหาคมมี 30 วัน		
14	$(8 + 22)^3$ หารด้วย 10^2 ไม่ลงตัว		
15	$7 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$		
16	9 เป็นจำนวนเฉพาะ		
17	$\{a, b, c\} = \{1, 2, 3\}$		
18	$\emptyset, \{0\} \neq \{\emptyset, 0\}$		
19	ปีนี้ทำนายว่า อาหารจะอุดมสมบูรณ์		

ข้อ	ข้อความ	เป็นประพจน์	ไม่เป็นประพจน์
20	อย่ามาอยู่กับฉันได้ไหม		
21	ดาวเสาร์เป็นบริวารของดวงอาทิตย์		
22	มีจำนวนเต็มระหว่าง 1 กับ 2		
23	ถ้า $x \in \mathbb{R}$ แล้ว $x > x$		
24	$x + 2 = 5$		
25	$x + y = 5$ เป็นสมการที่มีกราฟเป็นเส้นตรง		

2.2 การเชื่อมประพจน์

สัญลักษณ์แทนประพจน์

ข้อความที่เป็นประพจน์นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก เช่น p, q, r แทน ประพจน์

เช่น p แทน โลกหมุนรอบตัวเองใช้เวลา 1 ปี

q แทน 0 เป็นจำนวนเต็ม

r แทน $2 + 4 = 5$

และจะเห็นว่า p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ r มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวเชื่อมประพจน์

ในวิชาคณิตศาสตร์หรือชีวิตประจำวัน จะพบประโยคที่ได้จากการเชื่อมประโยคอื่น ๆ ด้วยคำว่า “และ” “หรือ” “ถ้า...แล้ว” “ก็ต่อเมื่อ” หรือจะพบประโยคซึ่งเปลี่ยนแปลงมาจากประโยคเดิมโดยเติมคำว่า “ไม่” โดยคำเหล่านี้เรียกว่า “ตัวเชื่อม (connective)”

ตัวเชื่อม คือ คำที่ใช้เชื่อมประพจน์ตั้งแต่ 2 ประพจน์ขึ้นไป ให้เป็นประโยค หรือ ประพจน์ใหม่
ตัวเชื่อมประพจน์ มี 5 ชนิด ดังต่อไปนี้

ตัวเชื่อม	สัญลักษณ์
นิเสธ	$\sim$
และ	$\wedge$
หรือ	$\vee$
ถ้า...แล้ว	$\rightarrow$
ก็ต่อเมื่อ	$\leftrightarrow$

สัญลักษณ์และตัวเชื่อมประพจน์

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว สามารถเขียนตัวเชื่อมประพจน์ทั้งสองด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

สัญลักษณ์	ความหมาย
$\sim p$	นิเสธของ p
$p \wedge q$	p และ q
$p \vee q$	p หรือ q
$p \rightarrow q$	ถ้า p แล้ว q
$p \leftrightarrow q$	p ก็ต่อเมื่อ q

ข้อสังเกต

- 1) ประพจน์ที่ถูกเชื่อมด้วยตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์เรียกว่า “ประพจน์เชิงประกอบ” ส่วนประพจน์เดียว ๆ จะเรียก “ประพจน์เชิงเดียว”
- 2) เราอ่าน $\sim p$ ว่า not p หรือ นิเสธ p
- 3) คำที่มีความหมายเหมือนกับตัวเชื่อมทั้ง 5 ชนิด

ตัวเชื่อม	คำที่มีความหมายเดียวกัน
ไม่	ไม่ใช่, ไม่จริงที่ว่า
และ	แต่, กับ, ที่, ซึ่ง
หรือ	หรือไม่ก็
ถ้า...แล้ว	ถ้า...ดังนั้น, ถ้า...จะได้, ดังนั้น
ก็ต่อเมื่อ	สมมูลกับ

2.3 การหาค่าความจริงของประพจน์

ค่าความจริงที่เป็นไปได้ของประพจน์

ให้เป็นประพจน์ใด ๆ แสดงว่าค่าความจริงของ p จะเกิดได้ 2 กรณี คือ **จริง (true)** ซึ่งเขียนแทนด้วย **T** หรือ **เท็จ (false)** ซึ่งเขียนแทนด้วย **F** แสดงได้ดังตาราง

p
T
F

เราเรียกตารางซึ่งแสดงกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่เกิดขึ้นทั้งหมดของ p ว่า ตารางค่าความจริง (truth table) ของ p ทำนองเดียวกันถ้ามีสองประพจน์ คือ p และ q แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี ซึ่ง T และ F ของ p ต่างจับคู่กับ T และ F ของ q แสดงได้ดังตาราง

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

และถ้ามีประพจน์ p, q, r แล้วจะมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่เกิดขึ้นได้ทั้งหมด 8 กรณี ดังตารางแสดงค่าความจริง

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

ข้อสังเกต “ ถ้า n ประพจน์ จำนวนกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมด 2^n กรณี ”

การสร้างตารางค่าความจริง (truth table)

เมื่อนำประพจน์ย่อย ๆ มาเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อม จะได้ค่าความจริงของประพจน์ผสมดังตารางต่อไปนี้

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว “นิเสธ” (negation) ของ p เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sim p$

ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อม “นิเสธ”	$\sim p$
--------------------------------------	----------

บทนิยาม 1 ให้ p เป็นประพจน์ $\sim p$ คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	
F	

ตัวอย่าง 1 ให้ p แทน จุด $(2,0)$ อยู่บนแกน X
 $\sim p$ แทน จุด $(2,0)$ ไม่อยู่บนแกน X



$p \equiv \dots\dots\dots$
 $\sim p \equiv \dots\dots\dots$

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วการเชื่อมประพจน์ p และ ประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “และ” (and) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \wedge q$

ตารางค่าความจริงของตัว “และ”	$p \wedge q$
------------------------------	--------------

บทนิยาม 2 ให้ p และ q เป็นประพจน์ $p \wedge q$ เป็นจริง เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นจริงเท่านั้น

p	q	$p \wedge q$

ตัวอย่าง 2 ให้ p แทน $3 \in \{1, 3, 5, \dots\}$
 q แทน 3 เป็นจำนวนคี่



$p \equiv \dots\dots\dots$ $q \equiv \dots\dots\dots$
 $p \wedge q \equiv \dots\dots\dots$

$\therefore p \wedge q$ แทน $3 \in \{1, 3, 5, \dots\}$ และ 3 เป็นจำนวนคี่

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วการเชื่อมประพจน์ p และ ประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “หรือ” (or) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \vee q$

ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อม “หรือ”	$p \vee q$
-------------------------------------	------------

บทนิยาม 3 ให้ p และ q เป็นประพจน์ $p \vee q$ เป็นเท็จ เมื่อ p เป็นเท็จ และ q เป็นเท็จเท่านั้น

p	q	$p \vee q$

ตัวอย่าง 3 ให้ p แทน $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
 q แทน $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม



$p \equiv \dots\dots\dots$ $q \equiv \dots\dots\dots$
 $p \vee q \equiv \dots\dots\dots$

$\therefore p \vee q$ แทน $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ หรือ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนเต็ม

หมายเหตุ : ความหมายของคำว่า “หรือ” ที่ใช้โดยทั่วไปมีสองกรณี

กรณีที่ 1 หมายถึงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

เช่น ในการโยนเหรียญครั้งละ 1 เหรียญแต่ละครั้งเหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อยเพียงอย่างเดียว

กรณีที่ 2 หมายถึง อย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่าง

เช่น ครูให้รางวัลแก่นักเรียนที่เรียนดี หรือช่วยกิจกรรมของโรงเรียน อาจหมายถึง นักเรียนที่ได้รับรางวัลบางคนอาจเรียนดีเพียงอย่างเดียว บางคนอาจช่วยกิจกรรมของโรงเรียนเพียงอย่างเดียว แต่บางคนอาจมีสมบัติทั้งสองประการก็ได้

ในทางตรรกศาสตร์มีข้อตกลงว่า ตัวเชื่อม “หรือ” หมายถึง กรณีที่ 2 เว้นแต่ว่าจะระบุไว้อย่างชัดเจนให้หมายถึงกรณีที่ 1

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วการเชื่อมประพจน์ p และ ประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว” (if...then) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \rightarrow q$ โดยเรียก p ว่า เหตุ และ เรียก q ว่า ผล

ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว”

$p \rightarrow q$

บทนิยาม 4 ให้ p และ q เป็นประพจน์ $p \rightarrow q$ เป็นเท็จ เมื่อ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จเท่านั้น

p	q	$p \rightarrow q$

ตัวอย่าง 4 ให้ p แทน 0 เป็นจำนวนเต็ม
 q แทน 0 เป็นจำนวนลบ

$\therefore p \rightarrow q$ แทน ถ้า 0 เป็นจำนวนเต็มแล้ว 0 เป็นจำนวนลบ



$p \equiv \dots\dots\dots q \equiv \dots\dots\dots$

$p \rightarrow q \equiv \dots\dots\dots$

ถ้า p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้วการเชื่อมประพจน์ p และ ประพจน์ q ด้วยตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ” (if and d only if) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $p \leftrightarrow q$

ตารางค่าความจริงของตัวเชื่อม “ก็ต่อเมื่อ”

$p \leftrightarrow q$

บทนิยาม 5 ให้ p และ q เป็นประพจน์ $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง เมื่อ

1. p เป็นจริง และ q เป็นจริง
2. p เป็นเท็จ และ q เป็นเท็จ

p	q	$p \leftrightarrow q$

ตัวอย่าง 5 ให้ p แทน 5 เป็นจำนวนคี่
 q แทน 5^4 เป็นจำนวนคี่



$p \equiv \dots \quad q \equiv \dots$
 $p \leftrightarrow q \equiv \dots$

$\therefore p \leftrightarrow q$ แทน 5 เป็นจำนวนคี่ก็ต่อเมื่อ 5^4 เป็นจำนวนคี่

สรุป ตารางค่าความจริง (truth table)

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

ข้อสังเกต

ตัวเชื่อมต่าง ๆ ที่กล่าวมานอกจากใช้เชื่อมประพจน์แล้ว ยังใช้ตัวเชื่อมในการเขียนสัญลักษณ์ในคณิตศาสตร์ด้วย เช่น

- ยูเนียนของเซต A และ เซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของเซต A หรือ ของเซต B หรือของทั้งสองเซต เขียนแทนด้วย $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid a \in A \vee b \in B\}$
- อินเตอร์เซกชันของเซต A และเซต B คือ เซตที่ประกอบด้วยสมาชิกของทั้งเซต A และ เซต B เขียนแทนด้วย $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid a \in A \wedge b \in B\}$
- ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$ เขียนเป็น $ab = 0 \rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

แบบฝึกหัดที่ 2

- ❶ ให้นักเรียนเขียนประพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ และหาค่าความจริงของแต่ละประพจน์

ข้อที่	ประโยค	ค่าความจริง
1	0 เป็นจำนวนนับ และ 6 จำนวนเต็ม	
2	9 ไม่เท่ากับ 10 หรือ 10 ไม่น้อยกว่า 9	
3	$\sqrt{2}$ และ -1 เป็นจำนวนจริง	
4	ถ้า $1 \notin \{1,2\}$ แล้ว $1 \subset \{1,2\}$	

ข้อที่	ประโยค	ค่าความจริง
5	$\sqrt{3}$ เป็นจำนวนตรรกยะ และไม่ใช่จำนวนจริง	
6	2 เป็น ห.ร.ม. ของ 4 และ 6 ก็ต่อเมื่อ 2 หาร $4 + 6$ ไม่ลงตัว	
7	ถ้า 3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 3^2 เป็นจำนวนคี่	
8	$\sqrt{-1}$ เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนอตรรกยะ	
9	13 เป็นจำนวนเฉพาะ ก็ต่อเมื่อ 13 มีตัวประกอบคือ 1 กับ 13	
10	ถ้า $\{3\} \subset \{3,4\}$ แล้ว $3 \notin \{3,4\}$	
11	$(2 + 6) + 4 = 12$ หรือ $12 = 2(5) + 2$	
12	ถ้าแมงมุมเป็นแมลง แล้วแมงมุมต้องมี 6 ขา	
13	งูเห่าและงูจงอางเป็นสัตว์มีพิษ	
14	ปลาโลมาหรือม้าน้ำเป็นสัตว์บก	
15	ถ้ากระต่ายบินได้แล้วคนก็บินได้	

❷ ให้นักเรียนหา นิเสธของประพจน์ต่อไปนี้ และหาค่าความจริงของประพจน์ที่เป็นนิเสธ

ข้อ	ประโยค	ค่าความจริง		ประโยคนิเสธ	ค่าความจริง
1	$4 + 9 = 10 + 3$	T		$4 + 9 \neq 10 + 3$	F
2	15 ไม่ใช่จำนวนจริง				
3	$\{3,4\} \cup \{1,3,5\} = \{1,3,4,5\}$				
4	$\{\{2\}\} \not\subset \{2\}$				
5	$ -3 + 6 \leq -3 + 6 $				

การหาค่าความจริงของประพจน์ผสม

หลักการเบื้องต้นในการหาค่าความจริงของประพจน์ผสม

- ❶ ในประพจน์เดียว หากมีนิเสธกำกับต้องหานิเสธก่อน แล้วจึงนำค่าความจริงไปพิจารณาร่วมกับประพจน์อื่น ๆ
- ❷ กรณีที่มีวงเล็บ ต้องหาค่าความจริงในวงเล็บให้เรียบร้อยเสียก่อน แล้วจึงนำไปพิจารณาหาค่าความจริงร่วมกับประพจน์อื่นต่อไป โดยมีหลักในการพิจารณาความสำคัญของตัวเชื่อมดังนี้

“ $\sim$ ” มีความสำคัญน้อยสุด
 “ $\wedge, \vee$ ” มีความมากกว่า “ $\sim$ ”
 “ $\rightarrow$ ” มีความสำคัญมากกว่า “ $\wedge, \vee$ ”
 “ $\leftrightarrow$ ” มีความสำคัญมากที่สุด

นั่นหมายความว่าในกรณีที่ประพจน์ที่กำหนดให้นั้น ไม่ใช่วงเล็บ ให้หาค่าความจริงของตัวเชื่อม “ $\sim$ ” ก่อน แล้วจึงหาค่าความจริงของตัวเชื่อม “ $\wedge, \vee$ ” จากนั้นจึงหาค่าความจริงของตัวเชื่อม “ $\rightarrow$ ” และลำดับสุดท้ายเป็นการหาค่าความจริงของตัวเชื่อม “ $\leftrightarrow$ ” เช่น $p \rightarrow q \wedge r \leftrightarrow s$ หมายถึง $[p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow s$

ตัวอย่าง 6 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง, เท็จ, เท็จ และ เท็จ ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$

ตัวอย่าง 7 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง, เท็จ, เท็จ และจริง ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ $(p \rightarrow \sim s) \wedge (q \rightarrow \sim r)$

ตัวอย่าง 8 กำหนดให้ p, q, r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ, เท็จ, เท็จ และจริง ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(p \rightarrow s) \leftrightarrow r$

2. $(p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow r)$

3. $(\sim p \rightarrow q) \vee (\sim s \rightarrow p)$

4. $(p \leftrightarrow s) \vee (\sim q \leftrightarrow r)$

ตัวอย่าง 9 กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง, เท็จ และจริง ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(p \vee \sim r) \rightarrow q$

2. $(q \wedge \sim p) \leftrightarrow p$

3. $(p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim r$

4. $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$

ตัวอย่าง 10 กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ, จริง และจริง ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $r \rightarrow (\sim p \wedge q)$

2. $(\sim q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge r)$

3. $(\sim p \leftrightarrow q) \wedge (r \rightarrow \sim q)$

4. $(\sim r \vee \sim p) \rightarrow (\sim q \vee r)$

ตัวอย่าง 11 กำหนดให้ p , q และ r เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง เท็จ และ จริง ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$

ตัวอย่าง 12 กำหนดให้ p , q , r และ s เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ, จริง, จริงและเท็จ ตามลำดับ แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์

$$[\{(p \wedge q) \vee r\} \rightarrow \{q \vee (\sim r \wedge s)\}] \leftrightarrow [(\sim q \rightarrow \sim p) \rightarrow (\sim s \rightarrow \sim r)]$$

ตัวอย่าง 13 กำหนด p แทน ประพจน์ “ $2 + 4 = 4 + 2$ ก็ต่อเมื่อ $5 \times 2 = 2 \times 3$ ”

q แทน ประพจน์ “ถ้า $2 \times 3 \neq 3 \times 2$ แล้ว $2 + 3 = 3 + 2$ และ $2 - 3 = 3 - 2$ ”

แล้วจงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\sim p \wedge q$

2. $q \rightarrow p$

3. $p \leftrightarrow q$

4. $p \vee \sim q$

ตัวอย่าง 14 จงหาความจริงของ “ถ้า $a < bc$ แล้ว จะได้ $a < b$ หรือ $a < c$ ” เมื่อกำหนดค่าของ a , b และ c ดังต่อไปนี้

1. $a = 1, b = 4, c = 1$

2. $a = -1, b = -2, c = 0$

3. $a = 1, b = -1, c = -1$

4. $a = -1, b = -1, c = -2$

ตัวอย่าง 15 กำหนดให้ p แทนประพจน์ “ถ้า $a + c > b + c$ แล้ว $a > b$ เมื่อ a, b, c คือจำนวนจริงใด ๆ”
 q แทนประพจน์ “สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ $|x| \geq 2$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq 2$ ”
 จงหาค่าความจริงของ $\sim p \vee q$

ตัวอย่าง 16 ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ

1. ถ้า r มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้วจงหาค่าความจริงของ $(p \vee q) \wedge r$

2. ถ้า q มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วจงหาค่าความจริงของ $p \rightarrow (p \vee q)$

3. ถ้า p มีค่าความจริงเป็นจริง แล้วจงหาค่าความจริงของ $p \vee (q \rightarrow r)$

ตัวอย่าง 17 ให้ p, q และ r และ s เป็นประพจน์ใด ๆ

1. ถ้า p เป็นจริง และ r เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$

2. ถ้า q และ r มีค่าความจริงเป็นจริงและเท็จตามลำดับ

จงหาค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow s)$

ตัวอย่าง 18 ให้ r, s เป็นประพจน์ใด ๆ และ p, q เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จงหาค่าความจริงของ $(r \wedge p) \vee [q \rightarrow (r \wedge s)]$

ตัวอย่าง 19 ถ้า $\sim p \vee q$ เป็นเท็จแล้วจงหาค่าความจริงของ $\sim p \rightarrow [q \vee (p \wedge r)]$

ตัวอย่าง 20 ให้ r, s และ t เป็นประพจน์ และประพจน์ $(r \rightarrow t) \wedge [\sim(s \vee t)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

จงหาค่าความจริงของ r, s และ t

ตัวอย่าง 21 ให้ p , q และ r เป็นประพจน์ โดยที่ $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $q \vee r$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ $[\sim q \wedge (p \vee r)] \leftrightarrow \sim r$

ตัวอย่าง 22 ถ้า $p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จและ $p \rightarrow r$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\sim(p \vee q)$

2. $(p \wedge r) \rightarrow q$

3. $\sim(p \vee r)$

4. $p \rightarrow (q \vee r)$

ตัวอย่าง 23 ถ้า $\sim p \rightarrow \sim q$ เป็นเท็จ และ $q \wedge r$ เป็นจริง จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\sim p \wedge (q \rightarrow r)$

2. $(p \vee q) \rightarrow r$

$$3. (p \wedge \sim q) \leftrightarrow \sim r$$

$$4. (q \leftrightarrow p) \wedge \sim r$$

ตัวอย่าง 24 กำหนด p, q, r, s และ k เป็นประพจน์ โดยที่

$[(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim p \wedge \sim s) \vee (\sim k \wedge s)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

จาก $[(\sim p \leftrightarrow q) \rightarrow (\sim q \vee \sim r)] \vee [(\sim p \wedge \sim s) \vee (\sim k \wedge s)]$

$$1. (q \wedge r) \leftrightarrow k$$

$$2. (q \vee s) \wedge \sim p$$

$$3. (k \rightarrow p) \leftrightarrow \sim p$$

$$4. (p \rightarrow q) \wedge (s \rightarrow r)$$

แบบฝึกหัดที่ 3

❶ กำหนดให้ p, q, r, s และ t มีค่าความจริงเป็น จริง, เท็จ, จริง, เท็จ และ เท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. $(p \vee q) \wedge r$

2. $(p \wedge r) \vee (t \wedge s)$

3. $(p \vee \sim s) \wedge (q \vee r)$

4. $\sim [(p \wedge \sim q) \wedge t]$

5. $\sim [(\sim r \vee \sim s) \wedge p]$

6. $(p \vee \sim q) \rightarrow (r \vee t)$

7. $(\sim r \wedge q) \leftrightarrow (s \wedge \sim t)$

8. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (r \rightarrow s)$

9. $(s \wedge \sim p) \leftrightarrow (q \rightarrow \sim r)$

10. $(q \vee r) \rightarrow (p \leftrightarrow \sim s)$

11. $[(p \rightarrow q) \wedge (t \rightarrow r)] \rightarrow s$

12. $[(p \vee q) \wedge (t \vee s)] \vee [(q \rightarrow r) \rightarrow \sim s]$

๒ ให้นักเรียนหาว่าประโยคต่อไปนี้จริงหรือเท็จ

1. ถ้าเดือนกุมภาพันธ์มี 28 วัน หรือ 29 วัน แล้วเดือนมิถุนายนมี 31 วัน

2. -10 ไม่น้อยกว่า -15 หรือมากกว่า -1 แต่ไม่เท่ากับ -1

3. ถ้า $1 + 3 = 4$ แล้ว $4 - 1 = 2$ ก็ต่อเมื่อ $4 - 1 = 3$

4. ถ้า $3 \in \{1, 3, 5\}$ และ $\{3\} \notin \{3, 4, 5\}$ แล้ว $\{3\} \subset \{3, 4, 5\}$

5. $\emptyset$ และ 0 เป็นสมาชิกของ $\{\emptyset, 0\}$ ก็ต่อเมื่อ $\{\emptyset, 0\}$ มีสับเซตแท้คือ $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset\}$, $\{0\}$

③ ถ้า $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ $(\sim p \vee q) \leftrightarrow (q \wedge p)$

④ ถ้า $\sim p \wedge q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ $[p \vee \sim q \vee (p \vee q)] \wedge [\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาค่าความจริงของ p และ q

⑤ ถ้า $[p \wedge (\sim q \rightarrow r)] \rightarrow (\sim s \vee r)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของ p, q, r และ s

การสร้างตารางค่าความจริง

ในการพิจารณาประพจน์ที่มีตัวเชื่อม เช่น $\sim p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$, $p \leftrightarrow q$ จะเห็นว่าประพจน์เหล่านี้มี p , q , r เป็นประพจน์ย่อย ซึ่งเรายังไม่กำหนดค่าความจริง เราจะเรียก p , q , r ว่าเป็นตัวแปรแทนประพจน์ใด ๆ และเรียกประพจน์ที่มีตัวเชื่อมดังกล่าวว่า **รูปแบบของประพจน์**

เนื่องจาก p , q , r เป็นตัวแปรแทนประพจน์ใด ๆ ดังนั้น ในการพิจารณาค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์จึงต้องกำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อยทุกกรณีที่เป็นไปได้

ตัวอย่าง 25 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

รูปแบบของประพจน์ $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ ประกอบด้วยประพจน์ย่อยสองประพจน์คือ p , q จึงมีกรณีเกี่ยวกับค่าความจริงที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด 4 กรณี

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
T	T					
T	F					
F	T					
F	F					

ตัวอย่าง 26 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \wedge q) \rightarrow r$

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \rightarrow r$
T	T	T		
T	T	F		
T	F	T		
T	F	F		
F	T	T		
F	T	F		
F	F	T		
F	F	F		

ตัวอย่าง 27 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $p \wedge \sim q$ กับ $\sim (p \rightarrow q)$

การสร้างตารางแบบลดรูป

ตัวอย่าง 28 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow (p \vee q)$

วิธีที่ 1

p	q	$p \vee q$	$p \rightarrow (p \vee q)$

วิธีที่ 2

$$p \rightarrow (p \vee q)$$

ตัวอย่าง 29 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $p \rightarrow \sim q$

ตัวอย่าง 30 จงสร้างตารางค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

แบบฝึกหัดที่ 4

❶ จงสร้างตารางค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \wedge (q \rightarrow p)$

2. $(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

3. $\sim q \leftrightarrow [p \wedge (q \rightarrow \sim p)]$

4. $[(p \rightarrow q) \wedge (p \vee s)] \rightarrow (r \rightarrow s)$

2.4 ประพจน์ที่สมมูลกัน

บทนิยาม 6

ถ้ารูปแบบของประพจน์สองรูปแบบใดที่มีค่าความจริงตรงกันกรณีต่อกรณี แล้วจะสามารถนำไปใช้แทนกันได้ เรียกสองรูปแบบของประพจน์ดังกล่าวว่า **รูปแบบประพจน์ที่สมมูลกัน** ประพจน์ A สมมูลกับประพจน์ B เขียนแทนด้วย $A \equiv B$

ตัวอย่าง 34 จงพิจารณาว่า ประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

$$1. \sim(p \vee q) \text{ กับ } \sim p \wedge \sim q \qquad 2. p \rightarrow q \text{ กับ } \sim q \rightarrow \sim p$$

$$3. \sim p \vee q \text{ กับ } p \rightarrow q \qquad 4. (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \text{ กับ } p \leftrightarrow q$$

กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

ประพจน์แต่ละข้อต่อไปนี้ “สมมูลกัน” สามารถนำมาทดแทนกันได้ มีดังต่อไปนี้

$$\left. \begin{array}{lll} 1. p \wedge q & \equiv & q \wedge p \\ 2. p \vee q & \equiv & q \vee p \\ 3. p \leftrightarrow q & \equiv & q \leftrightarrow p \end{array} \right\} \text{Commutative laws}$$

$p \rightarrow q \not\equiv q \rightarrow p$

$$\left. \begin{array}{lll} 4. p \wedge p & \equiv & p \\ 5. p \vee p & \equiv & p \\ 6. p \rightarrow p & \equiv & T \\ 7. p \leftrightarrow p & \equiv & T \end{array} \right\} \text{Idempotent laws}$$

$$\left. \begin{array}{lll} 8. p \wedge (q \wedge r) & \equiv & (p \wedge q) \wedge r \\ 9. p \vee (q \vee r) & \equiv & (p \vee q) \vee r \end{array} \right\} \text{Associative laws}$$

$$\left. \begin{array}{lll} 10. p \wedge (q \vee r) & \equiv & (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\ 11. p \vee (q \wedge r) & \equiv & (p \vee q) \wedge (p \vee r) \end{array} \right\} \text{Distributive laws}$$

$$12. p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \quad \text{Contrapositive}$$

$$13. p \vee \sim p \equiv T$$

$$14. p \wedge \sim p \equiv F$$

$$\left. \begin{array}{lll} 15. \sim (p \vee q) & \equiv & \sim p \wedge \sim q \\ 16. \sim (p \wedge q) & \equiv & \sim p \vee \sim q \end{array} \right\} \text{Demorgan laws}$$

$$17. \sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

$$18. \sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$$

$$19. \sim (\sim p) \equiv p \quad \text{Double negation}$$

$$\left. \begin{array}{lll} 20. T \wedge p & \equiv & p \\ 21. F \vee p & \equiv & p \end{array} \right\} \text{Identities laws}$$

$F \wedge p \equiv F$
 $T \vee p \equiv T$

$$22. p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \quad \text{Equivalence}$$

$$23. [(p \wedge q) \rightarrow r] \equiv p \rightarrow (q \rightarrow r) \quad \text{Exportation law}$$

ตัวอย่าง 35 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าสมมูลกันหรือไม่

1. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ กับ $(p \wedge q) \rightarrow r$

2. $p \rightarrow (q \vee r)$ กับ $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

3. $p \rightarrow q$ กับ $(p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$

4. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ กับ $p \rightarrow (q \wedge r)$

5. $p \wedge (q \vee \sim q)$ กับ p

$$6. (p \rightarrow q) \vee (r \wedge \sim r) \text{ กับ } \sim p \vee q$$

$$7. (p \wedge q) \rightarrow (q \vee r) \text{ กับ } \sim (q \vee r) \rightarrow (\sim p \vee \sim q)$$

$$8. (p \wedge q) \rightarrow \sim r \text{ กับ } r \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$$

$$9. [q \wedge (r \vee \sim r)] \vee [q \wedge \sim q] \text{ กับ } q$$

$$10. [p \rightarrow (q \wedge r)] \rightarrow [\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim r] \text{ กับ } [(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r)] \rightarrow [(r \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow q)]$$

นิเสธของประพจน์ผสม

บทนิยาม 7

“นิเสธของประพจน์ p ” คือ ประพจน์ที่มีค่าความจริง ตรงกันข้ามกับประพจน์ p ทุกกรณี
นิเสธของประพจน์ p เขียนแทนด้วย $\sim p$

กฎการสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ที่เกี่ยวข้องกับนิเสธนิเสธ

- | | | | |
|--------------------------------|----------|----------------------------|-----------------------------------|
| 1. $\sim(\sim p)$ | $\equiv$ | p | Double Negation |
| 2. $\sim(p \vee q)$ | $\equiv$ | $\sim p \wedge \sim q$ | Demorgan laws |
| 3. $\sim(p \wedge q)$ | $\equiv$ | $\sim p \vee \sim q$ | |
| 4. $\sim(p \rightarrow q)$ | $\equiv$ | $p \wedge \sim q$ | |
| 5. $\sim(p \leftrightarrow q)$ | $\equiv$ | $\sim p \leftrightarrow q$ | $\equiv p \leftrightarrow \sim q$ |

ตัวอย่าง 36 พิจารณาประพจน์ผสมในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นนิเสธกันหรือไม่

1. $p \rightarrow (q \vee r)$ กับ $p \wedge \sim q \wedge \sim r$

2. $p \rightarrow [(q \vee \sim s) \rightarrow r]$ กับ $p \wedge (q \vee \sim s) \wedge \sim r$

3. $(p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim r \rightarrow s)$ กับ $[\sim(p \wedge q) \rightarrow \sim r] \wedge [(\sim p \wedge q) \rightarrow \sim s]$

แบบฝึกหัดที่ 5

❶ จงพิจารณาว่ารูปแบบของประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกับรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดในข้อใด

1. $(p \vee q) \rightarrow r$

ก. $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow r)$

ข. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

2. $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

ก. $\sim (p \vee q) \rightarrow r$

ข. $\sim (p \vee q) \vee r$

3. $\sim [(p \wedge q) \rightarrow (\sim q \vee r)]$

ก. $(p \wedge q) \vee (q \wedge \sim r)$

ข. $p \wedge \sim (q \rightarrow r)$

4. $\sim p \rightarrow [q \rightarrow (r \vee p)]$

ก. $(p \vee \sim q) \vee r$

ข. $(\sim p \vee q) \vee r$

5. $p \leftrightarrow q$

ก. $(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge \sim p)$

ข. $(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim q \vee p)$

๒ จงเขียนข้อความที่สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

1. $(ab = 0 \wedge a \neq 0) \rightarrow b = 0$

2. $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ก็ต่อเมื่อ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนจริง

3. ถ้า a เป็นจำนวนนับที่มากกว่าศูนย์ และถ้า a เป็นจำนวนนับ แล้ว a^2 มากกว่าศูนย์

4. แดงหรือดำเป็นนักเรียน และแดงหรือขาวเป็นนักเรียน

$$5. xy < 0 \rightarrow (x < 0 \vee y < 0)$$

③ รูปแบบของประพจน์ (ก) เป็นนิเสธของรูปแบบของประพจน์ (ข) เมื่อค่าความจริงของรูปแบบของประพจน์ (ก) ต่างกับค่าความจริงของประพจน์(ข) ทุกกรณี จงตรวจสอบว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ว่ารูปแบบหรือข้อความ (ก) กับรูปแบบหรือข้อความ (ข) เป็นนิเสธกันหรือไม่เป็นนิเสธกัน

$$1. \text{ ก. } p \wedge q$$

$$\text{ข. } \sim p \wedge \sim q$$

$$2. \text{ ก. } p \vee q$$

$$\text{ข. } \sim p \wedge \sim q$$

$$3. \text{ ก. } p \leftrightarrow q$$

$$\text{ข. } (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$$

$$4. \text{ ก. ถ้า } 2+1 = 3 \text{ แล้ว } 3 \text{ เป็นจำนวนนับ}$$

$$\text{ข. } 3 \text{ ไม่ใช่จำนวนนับ แต่ } 2+1 = 3$$

$$5. \text{ ก. } a \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่และเป็นจำนวนเต็ม}$$

$$\text{ข. } a \text{ เป็นจำนวนคี่ หรือ ไม่ใช่จำนวนเต็ม}$$

2.5 สัจนิรันดร์ (tautology)

บทนิยาม 8 รูปแบบของประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทุกกรณี เรียกว่า “สัจนิรันดร์”

การตรวจสอบเป็นสัจนิรันดร์ โดยการสร้างตารางค่าความจริง

ตัวอย่าง 37 จงตรวจสอบว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $p \rightarrow (p \wedge q)$

2. $p \rightarrow (p \vee q)$

3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

4. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$

การตรวจสอบเป็นสัจนิรันดร์ โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 38 จงตรวจสอบว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$1. [(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow \sim q$$

$$2. (p \wedge q) \rightarrow (q \vee p)$$

$$3. (\sim q \rightarrow p) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

การตรวจสอบการเป็นสัจนิรันดร์ โดยอาศัยสูตรทางตรรกศาสตร์

ตัวอย่าง 39 จงตรวจสอบว่าประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$1. [(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)] \vee r$$

$$2. [(p \wedge \sim p) \rightarrow q] \vee r$$

$$3. p \vee [\sim p \vee (q \wedge \sim q)]$$

$$4. [(\sim r \wedge \sim s) \vee \sim (r \vee s)] \rightarrow (\sim r \wedge \sim s)$$

สมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์ (logical equivalence)

บทนิยาม 9 ประพจน์ p และ q จะถูกเรียกว่า สมมูลกันเชิงตรรกศาสตร์ (logical equivalence) ถ้า $p \leftrightarrow q$ เป็นสัจนิรันดร์ แล้ว $p \equiv q$

การตรวจสอบสัจนิรันดร์ เมื่อตัวเชื่อมเป็น “ก็ต่อเมื่อ”

สามารถตรวจสอบได้โดยใช้หลักการสมมูล โดยพิจารณาจากประพจน์ผสมทางขวาและทางซ้าย

“ถ้าสมมูลกัน แสดงว่า เป็นสัจนิรันดร์”

“ถ้าไม่สมมูลกัน แสดงว่า ไม่เป็นสัจนิรันดร์”

ตัวอย่าง 40 พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$1. [(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$$

$$2. [p \rightarrow (q \wedge r)] \leftrightarrow [(\sim q \vee \sim r) \rightarrow \sim p]$$

$$3. [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

$$4. [p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$$

$$5. (p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

แบบฝึกหัดที่ 6

❶ จงตรวจสอบรูปแบบของประพจน์ที่กำหนดให้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$1. [(\sim p \rightarrow q)] \rightarrow [(\sim p \leftrightarrow q)]$$

$$2. (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$3. \sim (p \wedge q) \rightarrow \sim (p \leftrightarrow q)$$

$$4. [(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \wedge r)]$$

$$5. [(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$$

$$6. [p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow r]$$

$$7. [(p \rightarrow q) \rightarrow p] \rightarrow p$$

$$8. \sim [(p \vee (\sim p \wedge q)) \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)]$$

$$9. \sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$$

$$10. [\sim p \wedge (p \vee q)] \rightarrow q$$

$$11. [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$12. [(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow r$$

$$13. \sim (p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow \sim q)$$

$$14. \sim (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$$

$$15. [p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee r]$$

$$16. [(p \rightarrow q) \wedge r] \leftrightarrow [r \wedge (\sim p \vee q)]$$

2.6 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผล คือ การอ้างว่า เมื่อมีข้อความ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุปข้อความ C ข้อความหนึ่งได้

การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญสองส่วน คือ

เหตุ หรือสิ่งที่กำหนดให้ ได้แก่ ข้อความ $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$

ผล หรือข้อสรุป ได้แก่ ข้อความ C

การอ้างเหตุผลอาจจะสมเหตุสมผลหรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้

ซึ่งสามารถตรวจสอบได้โดยใช้ตัวเชื่อม “และ”

เชื่อมเหตุทั้งหมดเข้าด้วยกัน และใช้ตัวเชื่อม “ถ้า...แล้ว”

เชื่อมส่วนที่เป็นเหตุกับผล คือ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C$

ถ้ารูปแบบ $P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \dots \wedge P_n \rightarrow C$

เป็นสัจนิรันดร์

จะกล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ “สมเหตุสมผล” (Valid)

ไม่เป็นสัจนิรันดร์

จะกล่าวว่า การอ้างเหตุผลนี้ “ไม่สมเหตุสมผล” (Invalid)

การตรวจสอบการสมเหตุสมผล

สามารถตรวจสอบได้ 2 วิธี ได้แก่

1. ตรวจสอบโดยการพิจารณาสัจนิรันดร์
2. ตรวจสอบโดยอ้างอิงรูปแบบที่สมเหตุสมผล

ตรวจสอบโดยการพิจารณาความเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 41 พิจารณาการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

1. เหตุ	1. $p \rightarrow q$	2. เหตุ	1. $p \rightarrow q$
	2. p		2. $\sim p$
ผล	q	ผล	$\sim q$

- | | |
|---------|--|
| 3. เหตุ | 1. ถ้าฝนตกแล้วหลังคาบ้านเปียก
2. หลังคาบ้านไม่เปียก |
| ผล | ฝนไม่ตก |
| | |
| 4. เหตุ | 1. ถ้ามีเงินได้โบนัส มีเงินฝากเงินกับธนาคารเพิ่ม 10,000 บาท
2. มีเงินฝากเงินกับธนาคารเพิ่ม 10,000 บาท |
| ผล | มีเงินได้โบนัส |
| | |
| 5. เหตุ | 1. เมย์จะซื้อรถคันใหม่ หรือ เมย์ลงทุนในตลาดหุ้น
2. เมย์ไม่ได้ซื้อรถคันใหม่ |
| ผล | เมย์ลงทุนในตลาดหุ้น |
| | |
| 6. เหตุ | 1. ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วจะต้องใช้เครื่องปั่นไฟ
2. ถ้าใช้เครื่องปั่นไฟ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้ |
| ผล | ถ้าไฟฟ้าดับ แล้วลิฟต์จะทำงานไม่ได้ |

ตรวจสอบโดยอ้างอิงรูปแบบที่สมเหตุสมผล

รูปแบบต่อไปนี้เป็นรูปแบบที่พิสูจน์แล้วว่า “สมเหตุสมผล” สามารถนำไปใช้อ้างอิงได้

รูปแบบที่	เหตุ	ผล
1. กฎการแจงผลตามเหตุ (Modus Ponens : M.P.)	$p \rightarrow q$	q
	p	
2. กฎการแจงผลค้านเหตุ (Modus Tollens : M.T.)	$p \rightarrow q$	$\sim p$
	$\sim q$	
3. กฎตรรกบทแบบสมมติฐาน (Hypothetical Syllogism : H.S.)	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow r$
	$q \rightarrow r$	
4. กฎตรรกบทแบบการเลือก (Disjunctive Syllogism : D.S.)	$p \vee q$	q
	$\sim p$	
5. กฎการตัด (Implification : I.)	$p \wedge q$	p, q
6. กฎการรวม (Conjunction : C.)	p	$p \wedge q$
	q	
7. กฎทวิบทสร้างเสริม (Constructive Dilemma : C.D.)	$p \rightarrow r$	$r \vee s$
	$q \rightarrow s$	
	$p \vee q$	
8. กฎทวิบทหักล้าง (Constructive Dilemma : C.D.)	$p \rightarrow r$	$\sim p \vee \sim q$
	$q \rightarrow s$	
	$\sim r \vee \sim s$	

ตัวอย่าง 42 พิจารณาการอ้างเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้ ว่าสมเหตุสมผลหรือไม่

1. $p \rightarrow q$ ผล p
2. $q \vee r$
3. $\sim r$

2. เหตุ 1. $p \wedge q$ ผล s
 2. $q \rightarrow r$
 3. $\sim r \vee s$

3. เหตุ 1. $\sim p \rightarrow r$ ผล p
 2. $\sim r \vee s$
 3. $\sim s$

4. เหตุผล
1. $\sim p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)$ ผล $t \vee \sim r$
 2. $\sim p \vee s$
 3. $\sim t \rightarrow q$
 4. $\sim s$

5. เหตุ 1. นายฉัตรชัยเป็นคนขยันหรือนายฉัตรชัยสอบได้ที่หนึ่งของห้อง
 2. นายฉัตรชัยเป็นคนไม่ขยัน
 ผล นายฉัตรชัยได้ที่หนึ่งของห้อง

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงตรวจสอบว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1. เหตุ 1. $p \wedge q$
 2. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
 ผล r

2. เหตุ 1. $p \vee q$
 2. $\sim p \vee r$
 3. $\sim r$
 ผล p

3. เหตุ 1. $(p \wedge q) \rightarrow (r \vee s)$
2. $\sim(r \vee s)$
ผล $\sim q$

4. เหตุ 1. $p \rightarrow (q \vee r)$
2. $\sim q \vee \sim r$
ผล $\sim p$

5. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
2. $r \vee p$
3. q
4. $r \rightarrow t$
ผล t

๒ จงพิจารณาว่าในแต่ละข้อต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1. เหตุ 1. 7 เป็นจำนวนเฉพาะ หรือ 6 เป็นจำนวนเฉพาะ

2. 7 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

ผล 6 ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

2. เหตุ 1. ถ้าออมสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ แล้ว ครอบครัวของอมจะย้ายมาอยู่ด้วย

2. ถ้าครอบครัวของอมย้ายมาอยู่ด้วย แล้ว ออมจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว

ผล ถ้า ออมสร้างบ้านหลังใหม่เสร็จ ออมจะได้ดูแลพ่อแม่ที่ชราแล้ว

3. เหตุ 1. ถ้าบุมทำยอดขายตามเป้าหมายที่ผู้จัดการตั้งไว้ แล้ว เขาจะได้รับโบนัส

2. บุมทำยอดขายตามเป้าหมายที่ผู้จัดการตั้งไว้

ผล บุมจะได้รับโบนัส

4. เหตุ 1. ถ้า แก้มซื้อกระเป๋าสีดำ แล้ว แก้มจะซื้อรองเท้าสีดำด้วย

2. แก้มซื้อรองเท้าสีดำ

ผล แก้มซื้อกระเป๋าสีดำ

2.7 ประโยคเปิด

บทนิยาม 10 **ประโยคเปิด** คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปรและเมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ ใช้ $P(x)$ หรือ P แทนประโยคเปิดใด ๆ ที่มี x เป็นตัวแปร

การเชื่อมประโยคเปิดด้วยตัวเชื่อม $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ ตลอดจนการเติม $\sim$ ทำได้เช่นเดียวกับการเชื่อมประพจน์

ตัวอย่าง 43 พิจารณาว่าประโยคในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นประพจน์ หรือประโยคเปิด หรือไม่ใช้ทั้งประพจน์และประโยคเปิด

ลำดับ	ประโยค	ประพจน์	ประโยคเปิด	ไม่ใช่ทั้งคู่
1	เขากำลังเรียนอยู่ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ใช่หรือไม่			
2	ถ้า $\{3\} \subset \{0, 1\}$ แล้ว $3 \in \{0, 1\}$			
3	$x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$			
4	เธอเป็นนักร้องเพลงไทยสากลของโรงเรียน			
5	$x^2 - 1$			
6	ทิ้งขยะให้เป็นที่จะช่วยให้บ้านเมืองสะอาด			
7	พลเอกประยุทธ์ จันทร์โอชา เป็นนายกรัฐมนตรีคนที่ 29 ของประเทศไทย			
8	$x + x = 2x$ และ $x - x = 0$			
9	$0.5x - x^2 \geq 6$			
10	ถ้า x เป็นจำนวนเต็มแล้ว $\sqrt{x}$ ไม่ใช่จำนวนจริง			

2.8 ตัวบ่งปริมาณ

“ตัวบ่งปริมาณ” คือข้อความที่บ่งบอกให้ทราบถึงจำนวนสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แต่ละข้อต่อไปนี้ จะเขียนนำหน้าประโยคเปิด

ตัวบ่งปริมาณในตรรกศาสตร์มี 2 ชนิด คือ

1. ข้อความ “สำหรับ...ทุกตัว” เขียนแทนด้วย “ $\forall$ ”
2. ข้อความ “สำหรับ...บางตัว” เขียนแทนด้วย “ $\exists$ ”

สัญลักษณ์และการอ่านตัวบ่งปริมาณ

$\forall x$ แทน สำหรับ x ทุกตัว (for all x)

ความหมายเดียวกับ สำหรับ x แต่ละตัว / สำหรับแต่ละค่าของ x / ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนใด ๆ

$\exists x$ แทน สำหรับ x บางตัว (for some x)

ความหมายเดียวกับ จะมี x บางตัว / มี x อย่างน้อยหนึ่งตัว / มีบางค่าสำหรับ x

ข้อควรจำ : การเขียนสัญลักษณ์แทนประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ

1. จะต้องเขียนเอกภพสัมพัทธ์กำกับไว้เสมอเพื่อจะได้ทราบขอบเขตของตัวแปรว่าแทนสิ่งใด
2. กรณีเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริงหรือการศึกษาเกี่ยวกับเซต นิยมละการเขียนเอกภพสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 44 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์เมื่อเอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง

ข้อ	ข้อความ
1	สำหรับ x ทุกตัว $x + x = 2x$
2	มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + 0 = 2x$
3	สำหรับ x ทุกตัว ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว x เป็นจำนวนจริง
4	จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม
5	จำนวนเต็มบางจำนวนยกกำลังสองแล้วเท่ากับ 1

ตัวอย่าง 45 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์ เมื่อ A, B เป็นเซต

ข้อ	ข้อความ
1	$A = B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B และสมาชิกทุกตัวของ B เป็นสมาชิกของ A
2	$A \not\subset B$ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกบางตัวของ A ไม่เป็นสมาชิกของ B

ตัวอย่าง 46 จงเขียนประโยคต่อไปนี้ ในรูปของสัญลักษณ์

ลำดับ	ประโยค
1	สุนัขทุกตัวเป็นสัตว์ดุร้าย
2	มีคนที่ซื้อสัตย์
3	$A \subset B$
4	จำนวนตรรกยะทุกตัวเป็นจำนวนจริง
5	จำนวนคู่บางตัวเป็นจำนวนคี่
6	มีจำนวนจริงบวก x ซึ่ง $x^2 + 5 \leq 0$ กำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง
7	มีจำนวนจริงบวก x ซึ่ง $x^2 + 1 \leq 7$
8	ถ้าทุกจำนวนจริง x มากกว่า 5 แล้วจะมีจำนวนนับ y ซึ่ง $1 - y^2 > 0$

ลำดับ	ประโยค
9	ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนใดก็ตาม $x^2 \geq 0$
10	ไม่จริงที่ว่า มีจำนวนคี่บางตัวเป็นจำนวนคู่

แบบฝึกหัดที่ 8

❶ จงเขียนข้อความแทนประโยคสัญลักษณ์ต่อไปนี้

$$1. \forall x [x < 2 \rightarrow x^2 < 4]$$

$$2. \forall y [y^2 - 4 = (y - 2)(y + 2)]$$

$$3. \exists x [2x + 1 = 0]$$

$$4. \exists x [x \in \mathbb{Q} \rightarrow x^2 = 2]$$

การหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณตัวเดียว

1. การหาค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$ และ $\exists x [P(x)]$ โดยวิธีแจกแจงสมาชิก

กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{a, b, c\}$, $P(x)$ เป็นประโยคเปิดที่มี x เป็นตัวแปร
และ $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ เป็นประพจน์ แล้วค่าความจริงของ $\forall$ หรือ $\exists$ หาได้ดังนี้

1. ค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$ คือ $P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

2. ค่าความจริงของ $\exists x [P(x)]$ คือ $P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

ตัวอย่าง 47 กำหนด $\mathcal{U} = \{2, 3, 4\}$ และ $P(x) : x > 0$ แล้วจงหาค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$

ตัวอย่าง 48 กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ $\forall x [x < 2]$

ตัวอย่าง 49 กำหนด $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ $\exists x [x < -3]$

2. การหาค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$ และ $\exists x [P(x)]$ โดยวิธีสุมแทนค่าตัวแปร

1. $\forall x [P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ นำสมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทนที่ x ในประโยคเปิด $P(x)$ แล้วต้องทำให้ประโยคเปิด $P(x)$ เป็นจริงเสมอ

2. $\forall x [P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ มีสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทนที่ x ในประโยคเปิด $P(x)$ เป็นเท็จ

3. $\exists x [P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ สมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทนที่ x ในประโยคเปิด $P(x)$ แล้ว ทำให้ประโยคเปิด $P(x)$ เป็นจริง

4. $\exists x [P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ นำสมาชิกทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ไปแทนที่ x ในประโยคเปิด $P(x)$ แล้วต้องทำให้ประโยคเปิด $P(x)$ เป็นเท็จเสมอ

ตัวอย่าง 50 กำหนด $\mathcal{U} = \{2, 3, 4, 5\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\forall x [x^2 < 20]$

2. $\exists x [x^3 > 10]$

ตัวอย่าง 51 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนนับ แล้วจงหาค่าความจริงของ

$$1. \quad \forall x [x^2 - 5x + 6 = 0]$$

$$2. \quad \exists x [x^2 - 2x \geq 0]$$

3. การหาค่าความจริงของ $\forall x [P(x)]$ และ $\exists x [P(x)]$ โดยวิธีการเปรียบเทียบ

สามารถทำได้ดังนี้ คือ

1. นำประโยคเปิดมาแก้สมการหรืออสมการ แล้วหาเซตคำตอบ
2. นำเซตคำตอบไปเปรียบเทียบกับเอกภพสัมพัทธ์ แล้วสรุปหาค่าความจริงดังนี้

บทนิยาม 11

1. $\forall x [P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ เอกภพสัมพัทธ์ เท่ากับเซตคำตอบ หรือ
เอกภพสัมพัทธ์เป็นสับเซตของเซตคำตอบ
2. $\forall x [P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ เอกภพสัมพัทธ์ ไม่เท่ากับเซตคำตอบ
3. $\exists x [P(x)]$ เป็นจริง ก็ต่อเมื่อ เอกภพสัมพัทธ์และเซตคำตอบมีสมาชิกร่วมกัน
4. $\exists x [P(x)]$ เป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ เอกภพสัมพัทธ์และเซตคำตอบไม่มีสมาชิกร่วมกัน

ตัวอย่าง 52 กำหนด $\mathcal{U} = \{2, 3\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

$$1. \quad \forall x [x^2 - 5x + 6 = 0]$$

$$2. \quad \exists x [x^2 - 3x = 0]$$

$$3. \quad \forall x [x(x-2)(x-3) = 0]$$

ตัวอย่าง 53 กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 4\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\exists x [x^2 - 3x + 2 = 0]$

2. $\exists x [x^2 - 5x + 6 = 0]$

4. การหาค่าความจริงของ $\forall$ หรือ $\exists$ เมื่อมีประโยคเปิดตั้งแต่ 2 ประโยคขึ้นไป

ตัวอย่าง 54 กำหนด $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\forall x [(x > 0) \rightarrow (x^2 < 0)]$

2. $\exists x [(x^2 > 0) \wedge (x < 0)]$

ตัวอย่าง 55 กำหนด $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\forall x [x > 0] \rightarrow \forall x [x + 1 = 4]$

2. $\exists x [x^2 > 8] \wedge \exists x [x + 1 = 0]$

ตัวอย่าง 56 กำหนด $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\forall x [x^2 \leq x]$

2. $\exists x \left[\left(x > \frac{1}{2} \right) \wedge \left(x^2 > \frac{1}{2} \right) \right]$

ตัวอย่าง 57 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนจริง แล้วจงหาค่าความจริงของ

1. $\forall x [x < 0] \leftrightarrow \forall x [x \leq 9]$

2. $\exists x [x > 2] \vee \exists x [-2 < x < 3]$

แบบฝึกหัดที่ 9

1 จงหาค่าความจริงของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณต่อไปนี้

1. $\forall x [x^2 > 8]$

เมื่อ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 2\}$

2. $\exists x [x < 0]$

เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 4, 7\}$

3. $\exists x [x^2 \geq 0]$

เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

4. $\forall x [x > 0]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{N}$

5. $\forall x [x + 1 = 4]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$

6. $\forall x [x + x = x \cdot x]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 2\}$

7. $\forall x [x + x = x \cdot x]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 1\}$

8. $\exists x [5 + x \neq 5]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{Z}$

9. $\forall x [x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ }]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \mathbb{R}$

$$10. \forall x [\text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนคี่ แล้ว } x \text{ เป็นจำนวนเฉพาะ}] \text{ เมื่อ } \mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$11. \forall x [x = 2n; \quad n \in \mathbb{N}] \quad \text{เมื่อ } \mathcal{U} = \mathbb{Q}$$

$$12. \exists x [x \text{ เป็นจำนวนนับหรือเป็นจำนวนเฉพาะ}] \text{ เมื่อ } \mathcal{U} = \{0, 2, 4, 6\}$$

$$13. \forall x [x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ}] \vee \exists x [x \text{ เป็นตัวประกอบของ 2}] \text{ เมื่อ } \mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$$

$$14. \exists x [x^2 \text{ เป็นจำนวนคู่}] \wedge \forall x [\text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนนับแล้ว } 2x \text{ เป็นจำนวนคู่}] \text{ เมื่อ } \mathcal{U} = \{0, 1, 2\}$$

สมมูลของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

พิจารณาประโยคเปิด $P(x) \rightarrow Q(x)$ กับ $\sim P(x) \vee Q(x)$ ไม่ว่าเราจะแทน x ด้วยสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์จะได้ประพจน์ในรูป $p \rightarrow q$ และ $\sim p \vee q$ ซึ่งสมมูลกัน ต่อไปนี้จึงกล่าวว่า $P(x) \rightarrow Q(x)$ สมมูลกับ $\sim P(x) \vee Q(x)$ ด้วย และจะใช้สมมูลของประโยคเปิดเทียบกับรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน เช่น

$p \rightarrow q$	สมมูลกับ	$\sim q \rightarrow \sim p$		$P(x) \rightarrow Q(x)$	สมมูลกับ	$\sim Q(x) \rightarrow \sim P(x)$
$p \vee q$	สมมูลกับ	$q \vee p$		$P(x) \vee Q(x)$	สมมูลกับ	$Q(x) \vee P(x)$
$\sim (p \rightarrow q)$	สมมูลกับ	$p \wedge \sim q$		$\sim (P(x) \rightarrow Q(x))$	สมมูลกับ	$P(x) \wedge \sim Q(x)$
$\sim (p \wedge q)$	สมมูลกับ	$\sim p \vee \sim q$		$\sim (P(x) \wedge Q(x))$	สมมูลกับ	$\sim P(x) \vee \sim Q(x)$

จากสมมูลของประโยคเปิดดังกล่าว ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้ข้างหน้าจะได้ประพจน์ที่สมมูลกันด้วย เช่น

$\forall x [P(x) \rightarrow Q(x)]$	สมมูลกับ	$\forall x [\sim P(x) \vee Q(x)]$
$\exists x [P(x) \rightarrow Q(x)]$	สมมูลกับ	
$\exists x [\sim (P(x) \rightarrow Q(x))]$	สมมูลกับ	
$\forall x [\sim (P(x)) \wedge Q(x)]$	สมมูลกับ	
$\forall x [P(x)] \rightarrow \exists x [Q(x)]$	สมมูลกับ	$\sim \forall x [P(x)] \vee \exists x [Q(x)]$
$\exists x [P(x)] \rightarrow \exists x [Q(x)]$	สมมูลกับ	
$\sim (\forall x [P(x)] \vee \exists x [Q(x)])$	สมมูลกับ	

ตัวอย่าง 58 ประโยคในข้อใดต่อไปนี้สมมูลกัน

ประโยค	สมมูล	ไม่สมมูล	ประโยค
$\sim [P(x) \vee Q(x)]$			$\sim P(x) \wedge \sim Q(x)$
$\forall x [P(x) \wedge Q(x)]$			$\forall x [Q(x) \wedge P(x)]$
$\exists x [P(x) \leftrightarrow Q(x)]$			$\exists x [\sim P(x) \vee Q(x)] \wedge [\sim Q(x) \vee P(x)]$
$\forall x [\sim (P(x) \rightarrow Q(x))]$			$\forall x [P(x) \wedge \sim Q(x)]$
$\exists x [P(x)] \wedge [Q(x)]$			$\forall x [Q(x)] \wedge \exists x [P(x)]$
$\forall x [P(x)] \rightarrow \exists x [Q(x)]$			$\sim \exists x [Q(x)] \rightarrow \sim \forall x [P(x)]$

นิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

นิเสธของ p คือ $\sim p$ จากรูปแบบนิเสธนี้จะตกลงให้นิเสธของประโยคเปิดหรือประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณโดยวิธีเติมตัวเชื่อม $\sim$ ข้างหน้าประโยค เช่น

นิเสธของ $P(x)$ คือ $\sim P(x)$

นิเสธของ $\forall x[P(x)]$ คือ $\sim \forall x[P(x)]$

นิเสธของ $\exists x[P(x)]$ คือ $\sim \exists x[P(x)]$

สำหรับนิเสธของประโยคเปิดในรูปแบบอื่นจะเปรียบเทียบกับนิเสธของประพจน์ได้ดังต่อไปนี้

นิเสธของ $p \wedge q$ คือ $\sim p \vee \sim q$	นิเสธของ $P(x) \wedge Q(x)$ นิเสธของ $\exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)]$	คือ $\sim P(x) \vee \sim Q(x)$ คือ $\sim \exists x[P(x)] \vee \sim \exists x[Q(x)]$
นิเสธ $p \rightarrow q$ คือ $p \wedge \sim q$	นิเสธของ $P(x) \rightarrow Q(x)$ นิเสธของ $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x)]$	คือ $P(x) \wedge \sim Q(x)$ คือ $\forall x[P(x)] \wedge \sim \exists x[Q(x)]$

ข้อสังเกต ประโยคเปิดที่เป็นนิเสธกัน ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไปข้างหน้า ผลจะไม่ได้ประพจน์ที่เป็นนิเสธกัน

นิเสธของ $P(x)$ คือ $\sim P(x)$ ถ้าเติมตัวบ่งปริมาณเป็น $\forall x[P(x)]$ กับ $\forall x[\sim P(x)]$ ทั้งสองประโยคนี้นี้ไม่เป็นนิเสธกัน เพราะมีบางกรณี $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ และ $\forall x[\sim P(x)]$ เป็นเท็จ เช่น

$\forall x[x < 2]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$\forall x[x \geq 2]$ เมื่อ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จด้วย

ตัวอย่าง 59 พิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้ เป็นนิเสธกันหรือไม่

ประโยค		เป็นนิเสธ	ไม่เป็นนิเสธ
$\sim \forall x[P(x)] \vee \sim \forall x[Q(x)]$	$\sim (\forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)])$		
$P(x) \wedge \sim Q(x)$	$P(x) \rightarrow Q(x)$		
$\exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$	$\sim \exists x[P(x) \leftrightarrow Q(x)]$		

ตัวอย่าง 60 จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

ข้อความ	นิเสธของข้อความ
$\forall x[x + 3 > 5]$	
$\exists x[x^2 < 0]$	
$\forall x[x > 0] \vee \exists x[x^2 < 0]$	

ข้อความ	นิเสธของข้อความ
$\forall x [x \neq 0] \rightarrow \exists x [x \neq 0]$	
จำนวนจริงทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่	
จำนวนจริงทุกจำนวนไม่ใช่จำนวนตรรกยะ	
มีจำนวนจริงบางจำนวนเป็นจำนวนคู่	
มีจำนวนจริง x บางจำนวนไม่เป็นจำนวนเต็ม	
มีจำนวนจริง x ซึ่งเป็นจำนวนตรรกยะแต่ไม่ใช่จำนวนเต็ม	

แบบฝึกหัดที่ 10

❶ จงตรวจสอบว่าประโยคต่อไปนี้สมมูลกับข้อใด

1. $\forall x [x > 0 \rightarrow x^2 > 0]$

a. $\forall x [x^2 < 0 \rightarrow x < 0]$

b. $\forall x [x \leq 0 \vee x^2 > 0]$

2. $\exists x [(x + 2 = 5) \wedge (x \in \mathbb{Z})]$

a. $\exists x [x \in \mathbb{Z} \wedge (x + 2 = 5)]$

b. $\exists x [(x + 2 \neq 5) \vee (x \notin \mathbb{Z})]$

3. $\forall x [x \geq 0]$

a. $\sim \exists x [x < 0]$

b. $\exists x [x > 0]$

4. $\sim \exists x [\sqrt{x} = 4 \wedge x \neq 16]$

a. $\forall x [\sqrt{x} \neq 4 \rightarrow x = 16]$

b. $\forall x [\sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16]$

$$5. \forall x [x \in \mathbb{R}] \rightarrow \exists x [x \in \mathbb{Z}]$$

$$a. \forall x [x \in \mathbb{Z}] \rightarrow \exists x [x \in \mathbb{R}]$$

$$b. \forall x [x \notin \mathbb{Z}] \rightarrow \exists x [x \notin \mathbb{R}]$$

$$6. \sim (\exists x [x + 2 > 5] \wedge \exists x [x^2 \leq 0])$$

$$a. \forall x [x + 2 \leq 5] \vee \forall x [x^2 > 0]$$

$$b. \sim (\forall x [x + 2 > 5] \wedge \forall x [x^2 \leq 0])$$

7. มีจำนวนคี่บางจำนวนไม่ใช่จำนวนเฉพาะ

a. ไม่จริงที่ว่าจำนวนคี่ทุกจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ

b. จำนวนคี่ทุกจำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ

8. ไม่จริงที่ว่ามีสับเซตของเซตอนันต์ที่เป็นเซตจำกัด

a. มีสับเซตของเซตอนันต์เป็นเซตจำกัด

b. สับเซตของเซตอนันต์เป็นเซตไม่จำกัด

๒ จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

$$1. \exists x [x + 2 \leq 0]$$

2. $\forall x [x \neq 0] \rightarrow \exists x [x > 0]$

3. $\forall x [x^2 < 0 \rightarrow x < 0]$

4. $\exists x [(x > 2) \vee (x + 1 < 1)]$

5. $\exists x [p(x) \wedge \sim q(x)]$

6. จำนวนตรรกยะทุกจำนวนเป็นจำนวนจริง

7. จำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนจริง

8. จำนวนจริงบางจำนวนน้อยกว่าหรือเท่ากับศูนย์ และมีจำนวนจริงบางจำนวนเมื่อยกกำลังสองแล้วไม่เท่ากับศูนย์

บรรณานุกรม

- กวิยา เนาวประทีป. (2556). **หนังสือชุดเทคนิคการเรียนรู้คณิตศาสตร์เรื่อง ตรรกศาสตร์**. กรุงเทพฯ: ฟิสิกส์เซ็นเตอร์.
- ธนวัฒน์ (สันติ) สนทราพรพล. (2560). **คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ฉบับเตรียมสอบ ม.4-5-6 เข้ามหาวิทยาลัย**. นนทบุรี : สำนักพิมพ์ธรรมบัณฑิต.
- ฝ่ายวิชาการ พิบิซี. (2562). **ยอดคณิตศาสตร์ เรื่อง ตรรกศาสตร์ ระดับ ม.ปลาย 4-5-6**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์พิบิซี.
- วรวิทย์ ธีระธำมรงค์. (2563). **สรุปเข้มลุยโจทย์คณิตศาสตร์ ม.4-5-6 เข้ามหาวิทยาลัย เล่ม 1 (HI-SPEED ABSOLUTE MATHS TESTS)**. กรุงเทพฯ: ศูนย์หนังสือแห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- วิไล ทองดีเจริญ, และ อำนาจ สุดยาใจ. (2563). **คณิตคิดเร็วทีละเรื่อง ตรรกศาสตร์ ชุด PURE MATH (สรุปเนื้อหาเข้มตะลุยโจทย์ ม.4-5-6 เข้ามหาวิทยาลัย)**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์ธรรมบัณฑิต.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). **หนังสือเรียนรายวิชา พื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560)**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ. (2562). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 1 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 (ฉบับปรับปรุง 2560)**. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.