

1. ฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

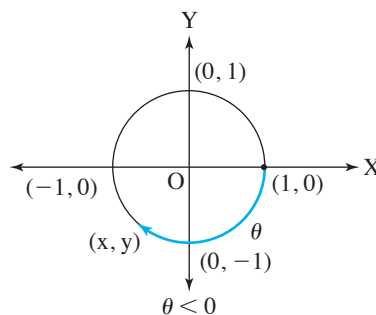
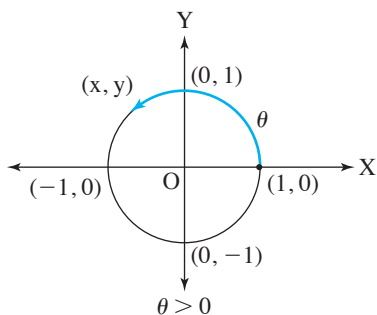
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

วงกลมหนึ่งหน่วย (the unit circle) มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด รัศมี 1 หน่วย ใช้กำหนดค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

วงกลมเป็นกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$

เมื่อวัดระยะจากจุด $(1, 0)$ ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยยาว $|\theta|$ หน่วย เมื่อ θ แทนจำนวนจริงใดๆ ถึงจุด (x, y) ซึ่งอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย

1. วัดไปในทิศทวนเข็มนาฬิกา $\theta > 0$
2. วัดไปในทิศตามเข็มนาฬิกา $\theta < 0$



เมื่อกำหนดจำนวนจริง θ ให้ จะสามารถหาจุด (x, y) ซึ่งเป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ในทิศทางการวัดที่กำหนดได้เพียงจุดเดียวเท่านั้น ถ้า $|\theta| > 2\pi$ การวัดส่วนโค้งจะเกิน 1 รอบ

กำหนดฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่สำหรับแต่ละจำนวนจริง θ ใดๆ $f(\theta) = x$ และ $g(\theta) = y$ เมื่อ (x, y) เป็นจุดปลายส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่วัดจากจุด $(1, 0)$ ยาว $|\theta|$ เรียกฟังก์ชัน g ว่า **ฟังก์ชันไซน์ (sine)** และเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันโคไซน์ (cosine)** เขียนแทน g ด้วย $\sin$ และเขียนแทน f ด้วย $\cos$

จะได้ $y = \sin \theta$ (อ่านว่า วายเท่ากับไซน์ที่ตา)
 $x = \cos \theta$ (อ่านว่า เอกซ์เท่ากับคอสที่ตา)

จากกราฟของความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | x^2 + y^2 = 1\}$

จะเห็นว่า $-1 \leq y \leq 1$ และ $-1 \leq x \leq 1$

ดังนั้น ค่าของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

เรนจ์ของฟังก์ชันไซน์และฟังก์ชันโคไซน์คือเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 1

และโดเมนของฟังก์ชันทั้งสองคือเซตของจำนวนจริง

จาก $x^2 + y^2 = 1$

จะได้ $(\cos \theta)^2 + (\sin \theta)^2 = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

หรือเขียน $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

☑️หมายเหตุ

$\cos^2 \theta$ หมายถึง $(\cos \theta)^2 = (\cos \theta)(\cos \theta)$

$\cos \theta^2$ หมายถึง $\cos$ ของจำนวนจริง θ^2

วงกลมหนึ่งหน่วยมีรัศมี 1 หน่วย เส้นรอบวงยาว $2\pi r$ หรือ 2π หน่วย เมื่อ $r = 1$ หน่วย

🗨️ 1.1 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงบางจำนวน

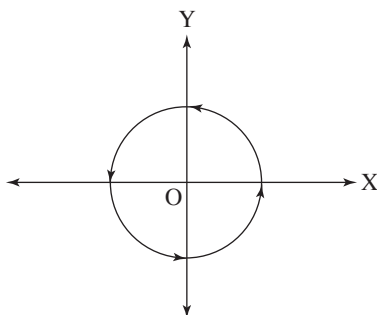
ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(0, 1)$ เท่ากับ $\frac{\pi}{2}$ หน่วย

ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(-1, 0)$ เท่ากับ π หน่วย

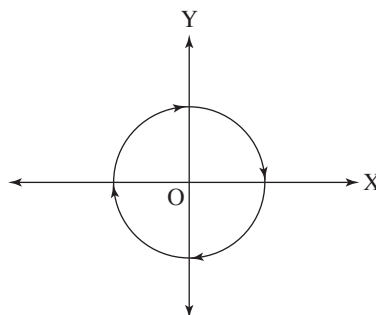
ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(0, -1)$ เท่ากับ $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย

ความยาวส่วนโค้งวัดจากจุด $(1, 0)$ ทวนเข็มนาฬิกาถึงจุด $(1, 0)$ เท่ากับ 2π หน่วย

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$



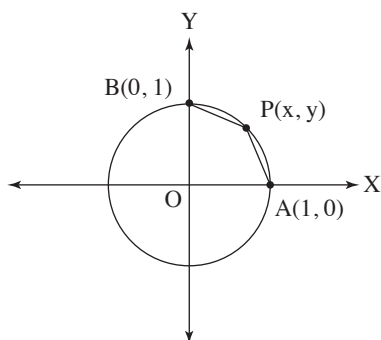
ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

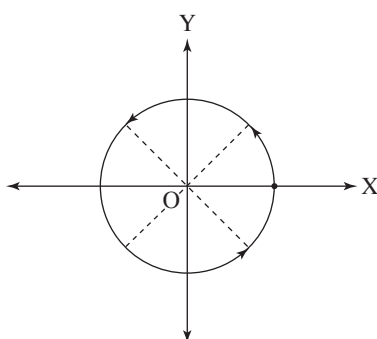
θ ฟังก์ชัน	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$-\frac{\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{2}$	-2π
sin									
cos									

ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

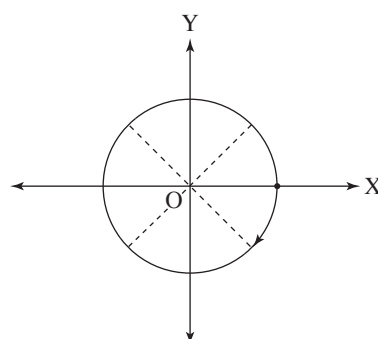


จากรูป $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{4}$ หน่วย วัดจากจุด $(1, 0)$ และเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนโค้ง AB จะได้ คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด $P(x, y)$ คือ $P\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ หรือ $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จาก ภาพสะท้อนของจุด P



ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา



ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

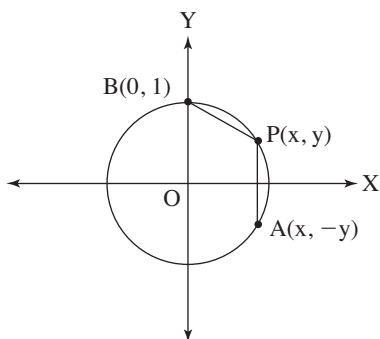
θ ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{5\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{4}$
sin								
cos								

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \dots, \frac{(2n+1)\pi}{4}$

และ $-\frac{3\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, \dots, -\frac{(2n+1)\pi}{4}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก



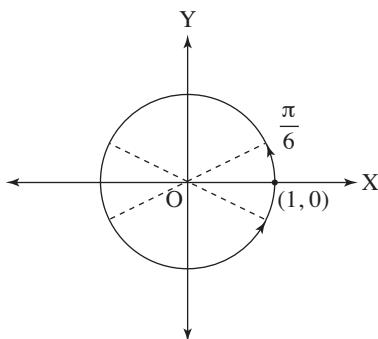
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$



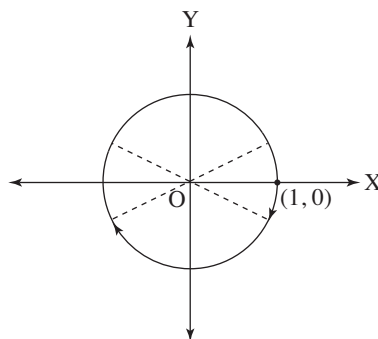
จากรูป $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{6}$ หน่วย วัดจากจุด $(1, 0)$ A เป็นภาพสะท้อนของจุด P ข้ามแกน X มีพิกัดเป็น $(x, -y)$

ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ทำให้คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จากภาพสะท้อนของจุด P



ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

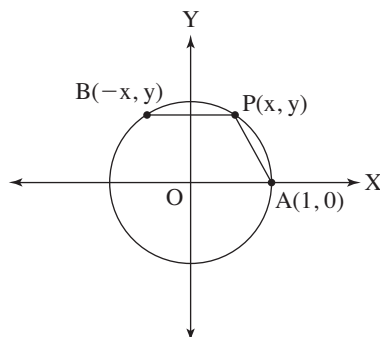


ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

θ ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{11\pi}{6}$
sin								
cos								

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, 2n\pi \pm \frac{7\pi}{6}$ และ $2n\pi \pm \frac{11\pi}{6}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

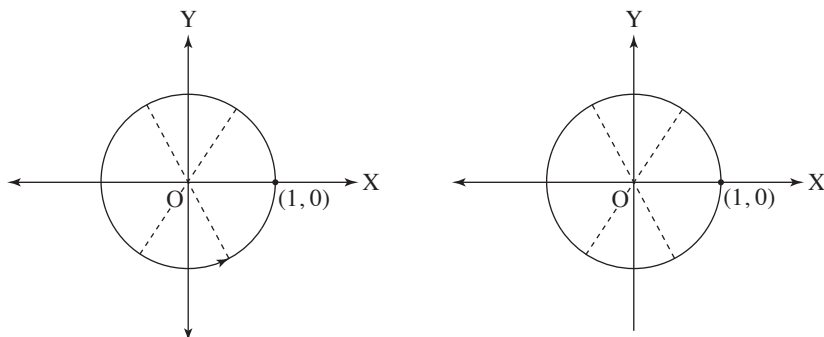
ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$



จากรูป $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว $\frac{\pi}{3}$ หน่วย วัดจากจุด $(1, 0)$ B เป็นภาพสะท้อนของจุด P ข้ามแกน Y มีพิกัดเป็น $(-x, y)$

ส่วนโค้ง PA ยาวเท่ากับส่วนโค้ง PB ทำให้คอร์ด PA ยาวเท่ากับคอร์ด PB

ดังนั้น พิกัดของจุด P คือ $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ส่วนพิกัดของจุดอื่นๆ หาได้จากภาพสะท้อนของจุด P



θ ฟังก์ชัน	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{4\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{3}$
sin								
cos								

ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงอยู่ในรูปของมุม $2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$, $2n\pi \pm \frac{4\pi}{3}$ และ $2n\pi \pm \frac{5\pi}{3}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

180 องศา เท่ากับ π เรเดียน

θ (องศา)	θ (เรเดียน)	$\sin \theta$	$\cos \theta$
0			
30			
45			
60			



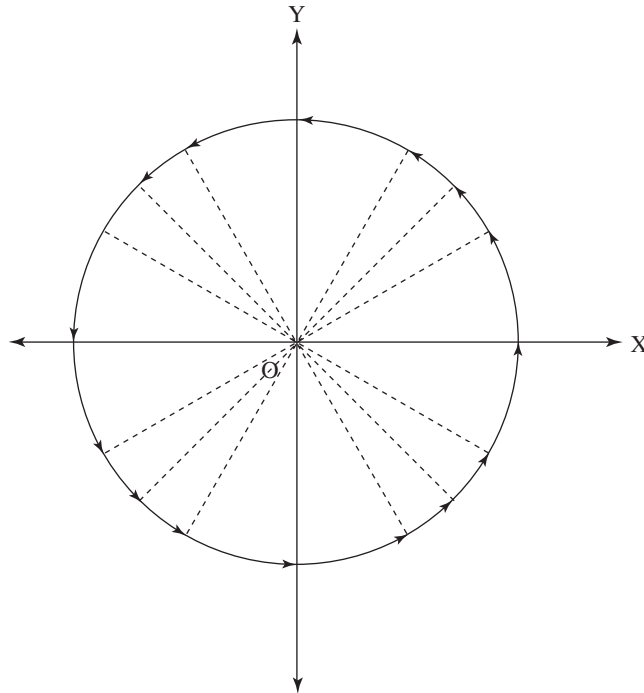
θ (องศา)	θ (เรเดียน)	$\sin \theta$	$\cos \theta$
90			
120			
135			
150			
180			
210			
225			
240			
270			
300			
315			
330			
360			

2. จงหาค่าของ $\sin \theta$ และ $\cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง โดยเขียนจำนวนจริง θ ในรูป $2n\pi \pm \alpha$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $0 \leq \alpha \leq 2\pi$

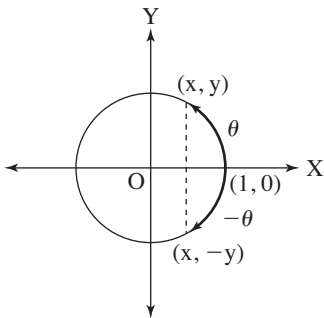
จำนวนจริง θ	แนวคิด	$\sin \theta$	$\cos \theta$
(1) 5π			
(2) -3π			
(3) $\frac{9\pi}{2}$			
(4) $-\frac{7\pi}{2}$			
(5) 63π			
(6) -47π			
(7) $\frac{27\pi}{2}$			
(8) $-\frac{13\pi}{2}$			
(9) 31π			
(10) -67π			
(11) $\frac{9\pi}{4}$			
(12) $\frac{13\pi}{3}$			



3. กำหนดวงกลมหนึ่งหน่วย จงเติมพิกัดของจุดปลายของส่วนโค้งบนวงกลม



1.2 ค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงใดๆ



จากจุด (x, y) และ $(x, -y)$ สรุปได้ว่า

$$x = \cos \theta \quad y = \sin \theta$$

$$x = \cos(-\theta) \quad -y = \sin(-\theta)$$

ดังนั้น $\sin(-\theta) = -\sin \theta$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ถ้า $\theta > 2\pi$ และหาร θ ด้วย 2π แล้วได้ n เหลือเศษ α (แอลฟา)

นั่นคือ $\theta = 2n\pi + \alpha$ เมื่อ $n \in \mathbb{I}^+$ และ $0 \leq \alpha < 2\pi$

การวัดส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด $(1, 0)$ ไปยาว θ หน่วย วัดไป α หน่วยก็เพียงพอ เนื่องจาก $2n\pi$ แสดงว่าวัดครบ n รอบ

สรุปได้ดังนี้

$$\sin \theta = \sin(2n\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos \theta = \cos(2n\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\sin \frac{25\pi}{3}$, $\sin \left(-\frac{25\pi}{6}\right)$, $\cos \frac{25\pi}{4}$ และ $\cos \left(-\frac{29\pi}{3}\right)$

วิธีทำ $\sin \frac{25\pi}{3} =$

$=$

$=$

$=$

ตอบ

$\cos \frac{25\pi}{4} =$

$=$

$=$

$=$

ตอบ

$\sin \left(-\frac{25\pi}{6}\right) =$

$=$

$=$

$=$

$=$

ตอบ

$\cos \left(-\frac{29\pi}{3}\right) =$

$=$

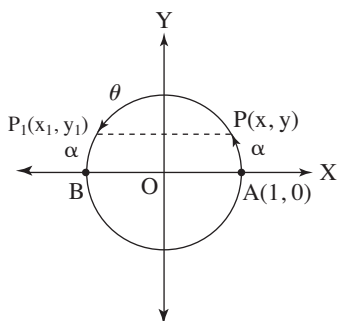
$=$

$=$

ตอบ

การหาค่าของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ของจำนวนจริงตั้งแต่ 0 ถึง 2π

1. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 2 $\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$



ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

ให้ $\alpha = \pi - \theta$ จะได้ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

และ $\theta = \pi - \alpha$

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของ P_1 ข้ามแกน Y

จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $y = \sin \alpha$ และ $x = \cos \alpha$

แต่ $y = y_1 = \sin \theta = \sin (\pi - \alpha)$

และ $-x = x_1 = \cos \theta = \cos (\pi - \alpha)$

$$\sin \theta = \sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\cos \theta = \cos (\pi - \alpha) = -\cos \alpha \quad \text{เมื่อ } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\sin \frac{5\pi}{6}$ และ $\cos \frac{2\pi}{3}$

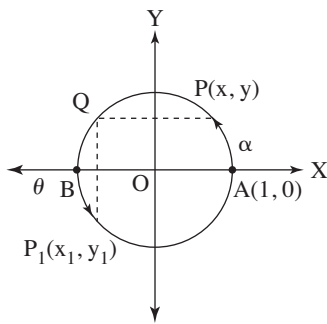
วิธีทำ $\sin \frac{5\pi}{6} =$
 $=$
 $=$

ตอบ

$\cos \frac{2\pi}{3} =$
 $=$
 $=$

ตอบ

2. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 3 $\left(\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$



เมื่อ $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ เขียนในรูป $\theta = \pi + \alpha$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย

จุด Q เป็นภาพสะท้อนของจุด P_1 ข้ามแกน X

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด Q ข้ามแกน Y

ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย $y_1 = -y, x_1 = -x$

จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $\sin \theta = \sin (\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos \theta = \cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\sin \frac{5\pi}{4}$ และ $\cos \frac{7\pi}{6}$

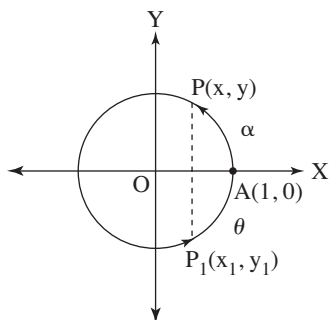
วิธีทำ $\sin \frac{5\pi}{4} =$
 $=$
 $=$

ตอบ

$\cos \frac{7\pi}{6} =$

ตอบ

3. เมื่อจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคที่ 4 $\left(\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi\right)$



เมื่อ $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ เขียนในรูป $\theta = 2\pi - \alpha$ โดยที่ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ให้ $P_1(x_1, y_1)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

จุด $P(x, y)$ เป็นภาพสะท้อนของจุด P_1 ข้ามแกน X

ส่วนโค้ง AP ยาว α หน่วย และ $y_1 = -y, x_1 = x$

จุด $P(x, y)$ เป็นจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว α หน่วย

ดังนั้น $\sin \theta = \sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos \theta = \cos (2\pi - \alpha) = \cos \alpha$ เมื่อ $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $\sin \frac{5\pi}{3}$ และ $\cos \frac{7\pi}{4}$

จำนวนจริง θ	เขียนในรูป $\theta = \pi \pm \alpha$ $\theta = 2n\pi \pm \alpha$	$\sin \theta$	$\cos \theta$
$\frac{7\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{5}$			
$\frac{5\pi}{3}$			
$\frac{9\pi}{10}$			
$\frac{17\pi}{9}$			
$\frac{15\pi}{7}$			
$-\frac{19\pi}{5}$			
$-\frac{7\pi}{3}$			



2. ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

บทนิยาม

สำหรับจำนวนจริง θ ใดๆ

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. โดเมนของฟังก์ชัน $\sin$ และ $\cos$ คือ $\mathbb{R}$
2. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\sin$ และ $\cos$ คือ $\{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 1\}$
3. โดเมนของฟังก์ชัน $\tan$ และ $\sec$ คือ $\mathbb{R} - \left\{x \in \mathbb{R} | x = \frac{(2n-1)\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\right\}$
4. โดเมนของฟังก์ชัน $\cot$ และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | x = n\pi, n \in \mathbb{I}\}$
5. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\tan$ และ $\cot$ คือ $\mathbb{R}$
6. เรนจ์ของฟังก์ชัน $\sec$ และ cosec คือ $\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} | -1 < x < 1\}$

ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันตรีโกณมิติต่างๆ

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \quad \text{เมื่อ } \tan \theta \neq 0 \text{ หรือ } \sin \theta \neq 0$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \cos \theta \neq 0$$

$$1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \quad \text{เมื่อ } \sin \theta \neq 0$$

แบบฝึกหัดที่ 3

จงเติมตารางแสดงค่าของฟังก์ชัน ตรีโกณมิติ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
0						
$\frac{\pi}{6}$						
$\frac{\pi}{4}$						
$\frac{\pi}{3}$						
$\frac{\pi}{2}$						

จงบอกว่าจุดปลายส่วนโค้งที่ยาว θ หน่วย อยู่ในจุดภาคใด เมื่อกำหนด

- | | |
|---|---|
| (1) $\sin \theta > 0$ และ $\cos \theta > 0$ | (2) $\sin \theta > 0$ และ $\cos \theta < 0$ |
| (3) $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta > 0$ | (4) $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta < 0$ |
| (5) $\tan \theta > 0$ และ $\cos \theta < 0$ | (6) $\sin \theta > 0$ และ $\tan \theta < 0$ |
| (7) $\cos \theta < 0$ และ $\tan \theta < 0$ | (8) $\cos \theta > 0$ และ $\tan \theta < 0$ |

2. กำหนดให้ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ และ $\sin \theta = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ

- | | |
|---|---|
| (1) $\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta$ | (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ |
| (3) $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta$ | (4) $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta$ |
| (1) $\operatorname{cosec} \theta + \sec \theta$ | (2) $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta$ |
| (3) $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta$ | (4) $\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta$ |

5. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันของจำนวนต่อไปนี้

θ	จุดปลาย ส่วนโค้งอยู่ใน จุดภาคที่	$\sin \theta$	$\cos \theta$	$\tan \theta$	$\operatorname{cosec} \theta$	$\sec \theta$	$\cot \theta$
(1) $\frac{2\pi}{3}$							
(2) $\frac{3\pi}{4}$							
(3) $\frac{5\pi}{6}$							
(4) $\frac{7\pi}{6}$							
(5) $\frac{5\pi}{4}$							
(6) $\frac{11\pi}{6}$							

6. จงหาค่าของ

(1) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$

(2) $\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right)$



7. จงหาค่าของ

$$(1) \sin \frac{5\pi}{6} + \tan \frac{7\pi}{6} - \cos \frac{3\pi}{4} \sin \frac{4\pi}{3}$$

$$(2) \cos \frac{25\pi}{4} \cos \frac{15\pi}{4} - \sin \frac{16\pi}{3} \sin \frac{13\pi}{4}$$

3. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมที่กำหนดให้ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง

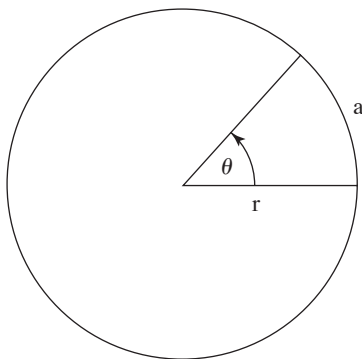
มุมและการวัดมุม

หน่วยในการวัดมุม คือ องศา

1 องศา เท่ากับ 60 ลิปดา (')

1 ลิปดา เท่ากับ 60 พิลิปดา (")

มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม มีขนาด 1 เรเดียน



มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมรัศมี r หน่วย ซึ่งรองรับด้วยส่วนโค้งของวงกลมที่ยาว a หน่วย จะมีขนาด $\frac{a}{r}$ เรเดียน

จากรูป จะได้ $\theta = \frac{a}{r}$

$$180 \text{ องศา} = \pi \text{ เรเดียน } (\pi \approx 3.1416)$$

$$1 \text{ องศา} = \frac{\pi}{180} \text{ เรเดียน} \approx 0.01745 \text{ เรเดียน}$$

$$1 \text{ เรเดียน} = \frac{180}{\pi} \text{ องศา} \approx 57^{\circ} 18'$$

ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 1 เรเดียน จะยาว 1 หน่วย

ดังนั้น ส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด θ เรเดียน จึงยาว θ หน่วย

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก ดังรูป

2. จงเปลี่ยนหน่วยเรเดียนให้เป็นองศาและเปลี่ยนหน่วยองศาให้เป็นเรเดียน

ข้อ	เรเดียน	องศา	ข้อ	องศา	เรเดียน
(1)	$\frac{7\pi}{4}$		(6)	36	
(2)	$\frac{5\pi}{3}$		(7)	72	
(3)	$\frac{3\pi}{2}$		(8)	90	
(4)	$\frac{4\pi}{3}$		(9)	120	
(5)	5π		(10)	1,200	

3. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่อไปนี้

(1) 210°

$$\sin 210^\circ =$$

$$\cos 210^\circ =$$

$$\tan 210^\circ =$$

(2) 315°

$$\sin 315^\circ =$$

$$\cos 315^\circ =$$

$$\tan 315^\circ =$$

(3) -135°

$$\sin (-135^\circ) =$$

$$\cos (-135^\circ) =$$

$$\tan (-135^\circ)$$



(4) -240°

$$\sin(-240^\circ)$$

$$\cos(-240^\circ)$$

$$\tan(-240^\circ)$$

4. จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมต่อไปนี้

(1) $\sin 960^\circ$

(2) $\cos 1125^\circ$

$$= \sin(720^\circ + 240^\circ)$$

(3) $\sin(-405^\circ)$

(4) $\tan 3360^\circ$

5. จงเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมขนาด θ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

(1) $\tan 200^\circ$

(2) $\sin(-100^\circ)$

6. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$

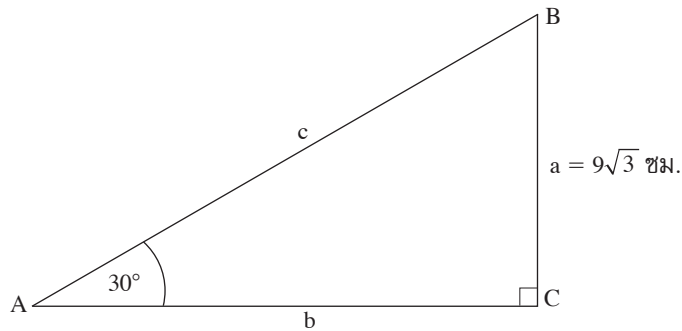
(2) $\sin 45^\circ \cos 60^\circ - \cos 45^\circ \sin 60^\circ$

(3) $\frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$

(4) $\frac{\tan 30^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 30^\circ \tan 45^\circ}$

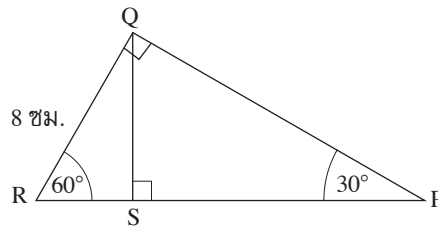
8. รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A} = 30^\circ$, $\hat{C} = 90^\circ$ และ $a = 9\sqrt{3}$ เซนติเมตร จงหาขนาดของ $\hat{B}$ และความยาวของด้านที่เหลือ

วิธีทำ



9. จากรูปที่กำหนด $\hat{Q} = 90^\circ$, $QR = 8$ เซนติเมตร, $\hat{QRP} = 60^\circ$, $\hat{QPR} = 30^\circ$ ถ้า $QS \perp PR$ จงหาความยาวของ $\overline{RS}$, $\overline{QS}$ และ $\overline{PS}$

วิธีทำ





4. กราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาคาบ แอมพลิจูด เรนจ์ และเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติได้

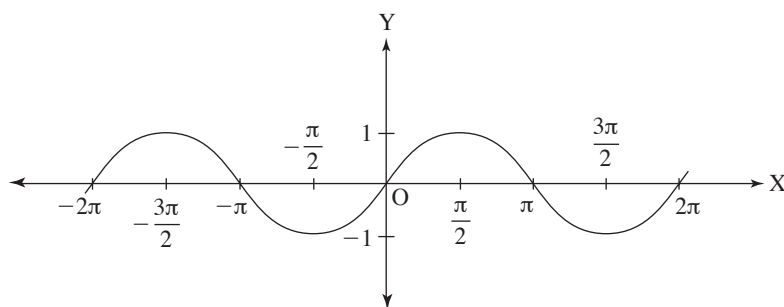
ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การคิดสร้างสรรค์

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \sin x$									
$y = \cos x$									
$y = \tan x$									

กราฟของ $y = \sin x$



จากกราฟ $-\frac{3\pi}{2} \leq x \leq -\frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\sin x$ ลดลงจาก 1 ไปถึง -1

$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ค่าของ $\sin x$ เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 1

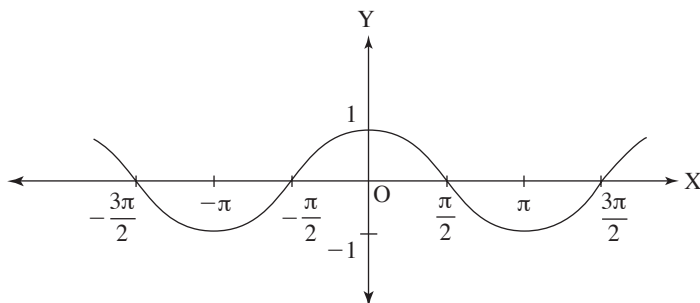
โดเมนของฟังก์ชันคือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันคือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันตัดแกน X ที่จุด $\dots, (-2\pi, 0), (-\pi, 0), (0, 0), (\pi, 0), (2\pi, 0), \dots$

กราฟของ $y = \sin x$ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 0)$

กราฟของ $y = \cos x$



จากกราฟ $-\pi \leq x \leq 0$ ค่าของ $\cos x$ เพิ่มขึ้นจาก -1 ไปถึง 1

$0 \leq x \leq \pi$ ค่าของ $\cos x$ ลดลงจาก 1 ไปถึง -1

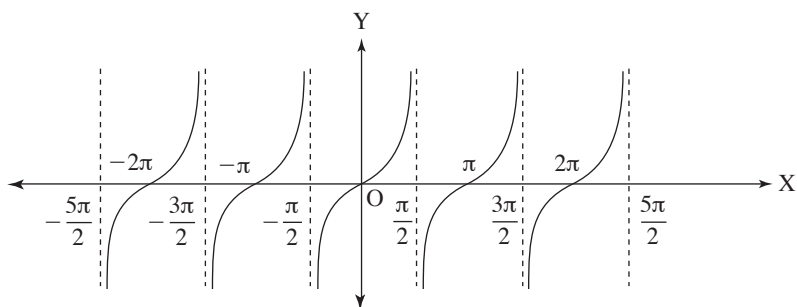
โดเมนของฟังก์ชันคือ เซตของจำนวนจริง

เรนจ์ของฟังก์ชันคือ $[-1, 1]$

กราฟของฟังก์ชันตัดแกน X ที่จุด $\dots, \left(-\frac{3\pi}{2}, 0\right), \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right), \dots$

กราฟของ $y = \cos x$ ตัดแกน Y ที่จุด $(0, 1)$

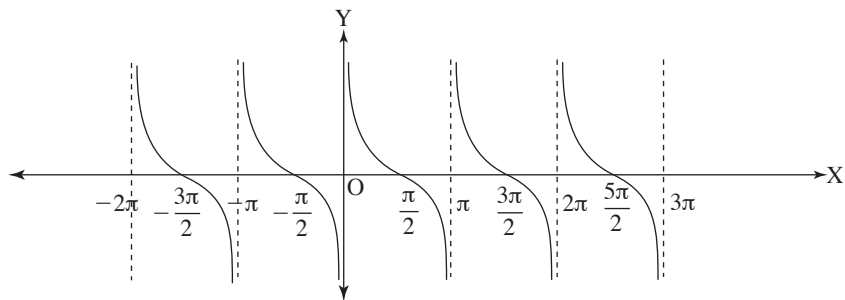
กราฟของ $y = \tan x$



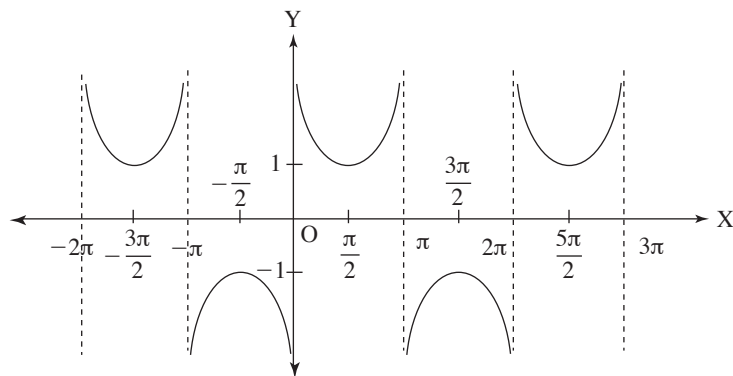
จากกราฟ ค่าของ $\tan x$ เพิ่มขึ้นทุกช่วง $\dots, -\frac{5\pi}{2} < x < -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},$
 $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}, \dots$



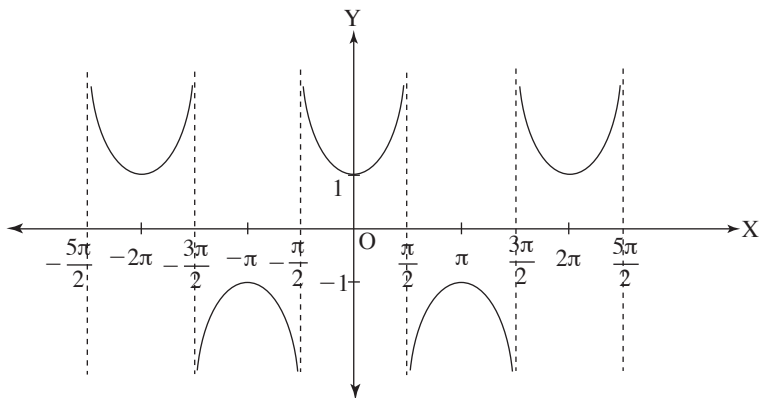
กราฟของ $y = \cot x$



กราฟของ $y = \operatorname{cosec} x$



กราฟของ $y = \sec x$



โดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
sine	$\mathbb{R}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \leq 1\}$
cosine	$\mathbb{R}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \leq 1\}$
tangent	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$	$\mathbb{R}$
cotangent	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$	$\mathbb{R}$
secant	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{I}\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 1\}$
cosecant	$\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi, n \in \mathbb{I}\}$	$\{y \mid y \in \mathbb{R}, y \geq 1\}$

$|y| \leq 1$ มีความหมาย $-1 \leq y \leq 1$

$|y| \geq 1$ มีความหมาย $y \leq -1$ หรือ $y \geq 1$



คาบและแอมพลิจูด

ฟังก์ชันตรีโกณมิติทุกฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ เมื่อแบ่งแกน x ออกเป็นช่วงย่อยโดยที่ความยาวของแต่ละช่วงย่อยเท่ากัน และกราฟในแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน ความยาวของช่วงย่อยที่สั้นที่สุดที่มีสมบัติดังกล่าว เรียกว่า **คาบ (period)** ของฟังก์ชัน

กราฟของ $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ ในช่วง $\dots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], \dots$ เป็นช่วงที่สั้นที่สุดของแต่ละช่วงย่อยมีลักษณะเหมือนกัน กราฟของฟังก์ชัน $y = \sin x$ และ $y = \cos x$ จึงมีคาบเท่ากับ 2π

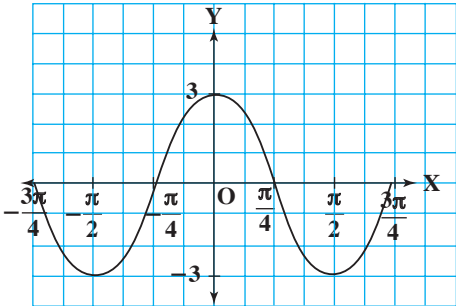
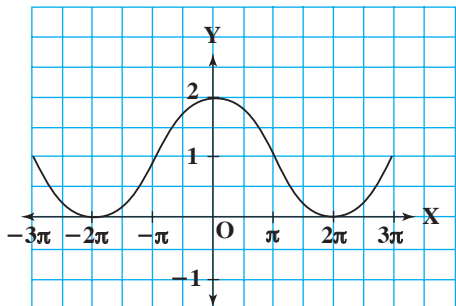
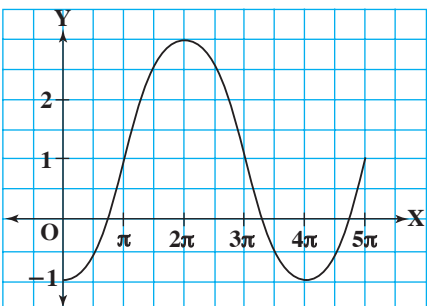
ฟังก์ชัน	คาบ	แอมพลิจูด	เรนจ์
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin(nx)$ เมื่อ $n > 0$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \sin(nx)$ เมื่อ $n, a > 0$	$\frac{2\pi}{n}$	a	$[-a, a]$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(nx)$ เมื่อ $n > 0$	$\frac{2\pi}{n}$	1	$[-1, 1]$
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a \cos(nx)$ เมื่อ $n, a > 0$	$\frac{2\pi}{n}$	a	$[-a, a]$



แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงเขียนคาบและแอมพลิจูดพร้อมทั้งวาดกราฟ

สมการ	คาบ	แอมพลิจูด	กราฟ
(1) $y = 3 \sin (2x)$			
(2) $y = 3 \sin \frac{1}{2}(-x)$			
(3) $y = 1 - 2 \sin \frac{1}{2}x$			
(4) $y = 1 + \sin (-2x)$			

สมการ	คาบ	แอมพลิจูด	กราฟ
(5) $y = 3 \cos 2x$			
(6) $y = 1 + \cos \frac{1}{2}x$			
(7) $y = 1 - 2 \cos \frac{1}{2}x$			



5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติของผลบวกและผลต่างของจำนวนจริงหรือมุม

เมื่อ α, β เป็นจำนวนจริงหรือมุมใดๆ

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \quad \dots(1)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \quad \dots(2)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \quad \dots(3)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad \dots(4)$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \quad \cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \quad \cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\cos 15^\circ, \cos 75^\circ, \sin 15^\circ$ และ $\sin 75^\circ$

วิธีทำ $\cos 15^\circ$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\tan 15^\circ$ และ $\tan 75^\circ$



จากสูตร (1), (2), (3) และ (4) จะได้

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta) \quad \dots(5)$$

$$2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta) \quad \dots(6)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta) \quad \dots(7)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta) \quad \dots(8)$$

ถ้า $\alpha + \beta = x$

$$\alpha - \beta = y$$

จะได้ $\alpha = \frac{x+y}{2}$ และ $\beta = \frac{x-y}{2}$

จากสูตร (5), (6), (7) และ (8) จะได้

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \dots(9)$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots(10)$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \quad \dots(11)$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \dots(12)$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนซึ่งเป็นสองเท่า สามเท่าของ α

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2 \alpha - 1}{2 \cot \alpha}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha - \tan^3 \alpha}{1 - 3 \tan^2 \alpha}$$



แบบฝึกหัดที่ 6

1. ถ้า $\sin x = -\frac{1}{4}$ และ $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ $\cos 2x$ และ $\sin 2x$

2. จงหาค่าของ

$$\begin{aligned} (1) \quad & \cos 70^\circ \cos 50^\circ - \sin 70^\circ \sin 50^\circ \\ &= \cos (70^\circ + 50^\circ) \end{aligned}$$

$$(2) \quad \cos 75^\circ \cos 15^\circ + \sin 75^\circ \sin 15^\circ$$

$$(3) \quad \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{7\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$(4) \quad \sin \frac{7\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \cos \frac{7\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$(5) \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{11\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$(6) \cos \frac{11\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} + \sin \frac{11\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$$

ใช้สูตร

1. $\sin (\alpha+\beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
2. $\sin (\alpha-\beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
3. $\cos (\alpha+\beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$
4. $\cos (\alpha-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$



3. จงหาค่าของ

$$(1) \cos 165^\circ$$

$$= \cos (120^\circ + 45^\circ)$$

$$(2) \sin 165^\circ$$

$$(3) \cos 22.5^\circ$$

$$(4) \sin 22.5^\circ$$



4. กำหนดให้ $\sin x = \frac{4}{5}$ และ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ จงหา

(1) $\sin 2x$

$$= 2 \sin x \cos x$$

(2) $\cos 2x$

(3) $\tan 2x$

จาก $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x = \pm \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{3}{5}$$

และ $\tan x = \frac{4}{3}$

(4) $\sin 4x$



5. จงหาค่าของ

(1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$

(2) $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$

(3) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$

(4) $\cos 75^\circ - \cos 15^\circ$

ใช้สูตร 1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$
3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

2. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

4. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$



6. จงหาค่าของ

(1) $\sin 75^\circ \cos 15^\circ$

(2) $\cos 75^\circ \sin 15^\circ$

(3) $\cos 45^\circ \cos 15^\circ$

(4) $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$

ใช้สูตร 1. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta)$

2. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin (\alpha + \beta) - \sin (\alpha - \beta)$

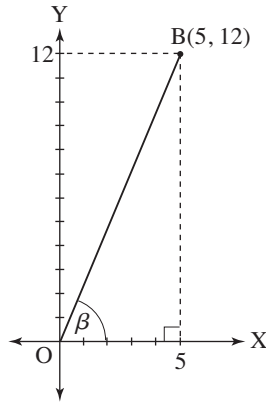
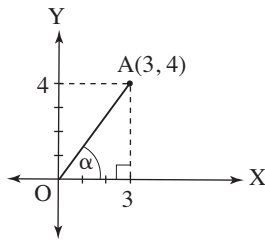
3. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)$

4. $2 \sin \alpha \sin \beta = \cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta)$





7. กำหนดให้ $\sin \alpha = \frac{4}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
 $\cos \beta = \frac{5}{13}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$



จงหา

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

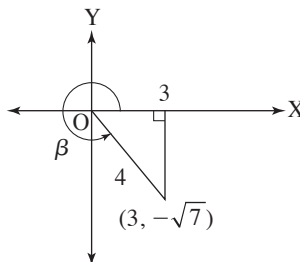
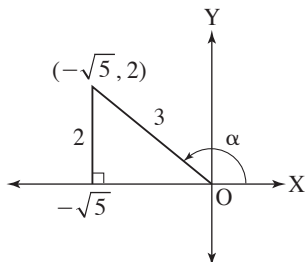
(2) $\sin(\alpha - \beta)$

(3) $\cos(\alpha + \beta)$

(4) $\cos(\alpha - \beta)$

8. กำหนดให้ $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

$\sin \beta = -\frac{\sqrt{7}}{4}, \frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$



จงหา

(1) $\sin(\alpha + \beta)$

(2) $\sin(\alpha - \beta)$

(3) $\cos(\alpha + \beta)$

(4) $\cos(\alpha - \beta)$

6. ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันที่มีตัวผกผันเป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชันนั้นต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 เท่านั้น เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจึงไม่เป็นฟังก์ชัน แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันตรีโกณมิติให้เหมาะสม ตัวผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติจะเป็นฟังก์ชัน

6.1 ตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์

ฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \sin x\}, -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันไซน์คือ $\{(x, y) | x = \sin y\}$ จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

แต่ถ้ากำหนดโดเมนของฟังก์ชันไซน์เป็น $\left\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right\}$ ฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$

เป็นฟังก์ชัน 1-1 จะมีฟังก์ชันผกผันคือ $\{(x, y) | x = \sin y, -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$ ซึ่งเรียกว่า arcsine

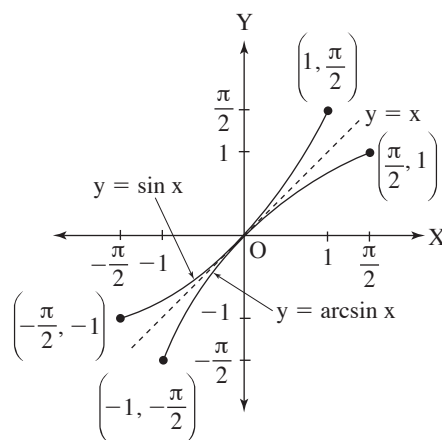
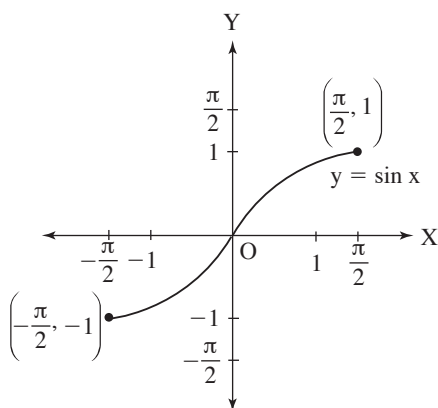
บทนิยาม

ฟังก์ชัน arcsine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \sin y$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x, y) \in \arcsine$ จะได้ $y = \arcsine x$ หรือ $y = \arcsin x$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \sin y$
 เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$
 $y = \arcsin x, -1 \leq x \leq 1$ และ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

☑ หมายเหตุ

โดเมนของฟังก์ชัน $\arcsine$ คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน $\arcsine$ คือ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ

(1) $\arcsin \frac{1}{2}$

(2) $\arcsin (-1)$

วิธีทำ (1) ให้ $\arcsin \frac{1}{2} = \theta$

6.2 ตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

ฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \cos x, -\infty < x < \infty, -1 \leq y \leq 1\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นตัวผกผันของฟังก์ชันโคไซน์คือ $\{(x, y) | x = \cos y\}$ จึงไม่เป็นฟังก์ชัน

เมื่อกำหนดโดเมนของ $y = \cos x$ โดยให้ $0 \leq x \leq \pi$ จะได้ฟังก์ชัน $\{(x, y) | y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi\}$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ซึ่งมีฟังก์ชันผกผันคือ $\{(x, y) | x = \cos y, -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \pi\}$ เรียกฟังก์ชันผกผันนี้ว่า arccosine

บทนิยาม

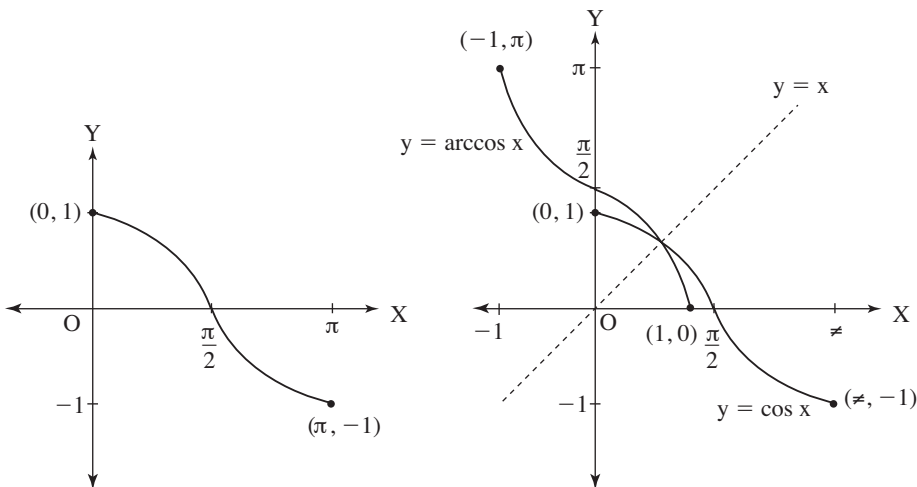
ฟังก์ชัน arccosine คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \cos y$ และ $0 \leq y \leq \pi$

เมื่อ $(x, y) \in \text{arccosine}$ จะได้ $y = \text{arccosine } x$ หรือ $y = \arccos x$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \cos y$ เมื่อ $0 \leq y \leq \pi$

$$y = \arccos x, -1 \leq x \leq 1 \text{ และ } 0 \leq y \leq \pi$$

หมายเหตุ

โดเมนของฟังก์ชัน $\arccos$ คือ $[-1, 1]$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน $\arccos$ คือ $[0, \pi]$



ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ

(1) $\arccos 1$

(2) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

วิธีทำ (1) ให้ $\arccos 1 = \theta$

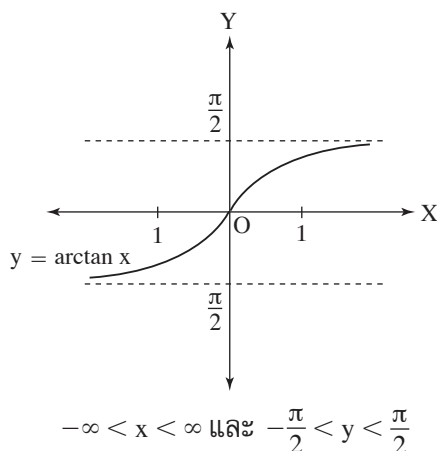
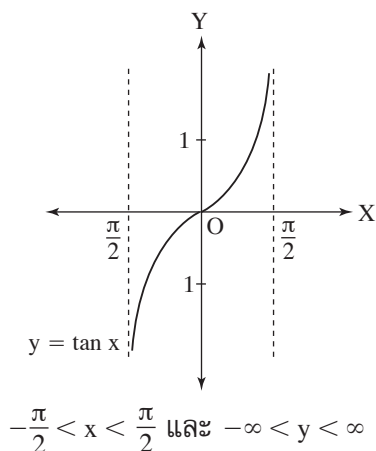
(2) ให้ $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \theta$
 เนื่องจาก $0 \leq \theta \leq \pi$

6.3 ตัวผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์

บทนิยาม

ฟังก์ชัน arctangent คือ เซตของคู่อันดับ (x, y) โดยที่ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$

เมื่อ $(x, y) \in \text{arctangent}$ จะได้ $y = \text{arctangent } x$ หรือ $y = \text{arctan } x$ มีความหมายเช่นเดียวกับ $x = \tan y$ และ $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$



หมายเหตุ

โดเมนของฟังก์ชัน $\arctan$ คือ $\mathbb{R}$ และเรนจ์ของฟังก์ชัน $\arctan$ คือ $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ

(1) $\arctan \sqrt{3}$

(2) $\arctan (-1)$

วิธีทำ (1) ให้ $\arctan \sqrt{3} = \theta$



(2) ให้ $\arctan (-1) = \theta$

เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$

ตารางสรุปโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีฟังก์ชันผกผัน

ฟังก์ชัน	โดเมน	เรนจ์
$y = \sin x$	$\{x \mid -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \arcsin x$	$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y \mid -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$
$y = \cos x$	$\{x \mid 0 \leq x \leq \pi\}$	$\{y \mid -1 \leq y \leq 1\}$
$y = \arccos x$	$\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$	$\{y \mid 0 \leq y \leq \pi\}$
$y = \tan x$	$\{x \mid -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\}$	$\mathbb{R}$
$y = \arctan x$	$\mathbb{R}$	$\{y \mid -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\}$

แบบฝึกหัดที่ 7

1. จงหาค่าของ

(1) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\arcsin 0$

(3) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

(4) $\arccos \frac{1}{2}$

(5) $\arccos (-1)$

(6) $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$

(7) $\arctan \frac{\sqrt{3}}{3}$

(8) $\arctan (-\sqrt{3})$

(9) $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$

(10) $\arcsin \left(-\frac{1}{2} \right)$



2. จงหาค่าของ

$$(1) \arccos\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) \\ = \arccos(1)$$

$$(2) \operatorname{arccot}\left(\tan \frac{\pi}{6}\right)$$

$$(3) \tan\left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$(4) \sec\left(\arccos \frac{1}{2}\right)$$

$$(5) \sin(\arctan(-1))$$

$$(6) \cos(\operatorname{arccot}(-\sqrt{3}))$$

3. จงหาค่าของ

$$(1) \sin\left(\arccos \frac{2}{3}\right)$$

$$(2) \operatorname{cosec}\left(\arccos \frac{1}{3}\right)$$


$$(3) \sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$$

$$(4) \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$$

$$(5) \cot\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right)$$

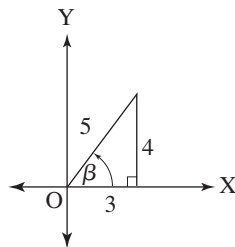
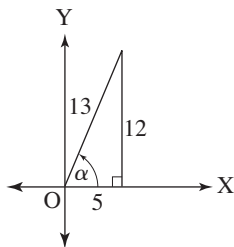


4. จงหาค่าของ

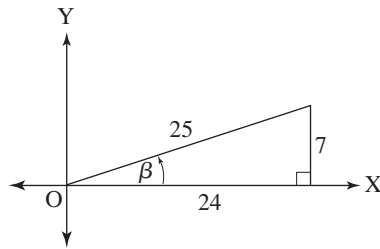
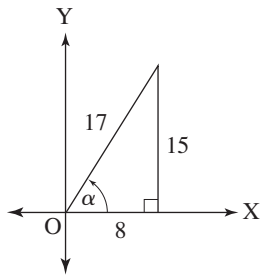
(1) $\cos \left(2 \arcsin \frac{12}{13} \right)$

(2) $\cos (2 \arctan \sqrt{3})$

(3) $\sin \left(\arcsin \frac{12}{13} + \arcsin \frac{4}{5} \right)$



$$(4) \cos \left(\arctan \frac{15}{8} - \arcsin \frac{7}{25} \right)$$



$$(5) \cos \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} + \arccos \frac{4}{5} \right)$$



7.1 เอกลักษณ์

เอกลักษณ์พื้นฐาน

$$\sin \theta = \frac{1}{\operatorname{cosec} \theta}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}$$

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

ตัวอย่างที่ 1 จงพิสูจน์ว่า $\frac{\tan x \operatorname{cosec}^2 x}{1 + \tan^2 x} = \cot x$

ตัวอย่างที่ 2 จงพิสูจน์ว่า $(\sec x + \tan x)(1 - \sin x) = \cos x$



แบบฝึกหัดที่ 8

1. จงพิสูจน์เอกลักษณ์

$$(1) \sec \theta \cot \theta = \operatorname{cosec} \theta$$

$$(2) \tan \theta \cot \theta - \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$(3) \cos \theta (\tan \theta + \cot \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$(4) \sec^2 \theta \operatorname{cosec}^2 \theta = \sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta$$

$$(5) \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} = (\sec \theta - \tan \theta)^2$$

$$(6) \frac{1 + \sec \theta}{\sin \theta + \tan \theta} = \operatorname{cosec} \theta$$

$$(7) (\operatorname{cosec} x + \cot x)^2 = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

$$(8) \frac{\tan x}{\sec x - \cos x} = \operatorname{cosec} x$$

7.2 สมการตรีโกณมิติ

การแก้สมการตรีโกณมิติใช้วิธีการเดียวกับการแก้สมการพีชคณิต สมการลอการิทึมหรือสมการเอกซ์โพเนนเชียล โดยอาศัยความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของจำนวนจริงหรือมุมใดๆ อาจซ้ำกัน ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้คำตอบอยู่ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ควรตอบในรูปของค่าทั่วไป

ตัวอย่างที่ 3

วิธีทำ

จงแก้สมการ $2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$2 \sin^2 \theta - \sin \theta - 1 = 0$$

☑หมายเหตุ

ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดช่วงของ θ มาให้

$$\text{ค่าทั่วไปคือ } \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta = 2n\pi + \frac{11\pi}{6} \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม}$$



แบบฝึกหัดที่ 9

1. จงแก้สมการ เมื่อ $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$

(1) $\cos 2\theta = \cos \theta - 1$

วิธีทำ

(2) $(1 + 2 \sin \theta) \cos 2\theta = 0$

วิธีทำ



$$(3) \sin \theta = 2 \cos (\theta - 30^\circ)$$

$$(4) \cos 3\theta = \cos \theta$$

2. จงแก้สมการโดยตอบในรูปค่าทั่วไป

$$(1) \tan^2 \theta - 1 = 0$$



$$(2) \tan \theta \sin \theta + \tan \theta = 0$$

วิธีทำ

8. กฎของโคไซน์และกฎของไซน์

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถใช้กฎของโคไซน์และกฎของไซน์ในการแก้ปัญหาได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

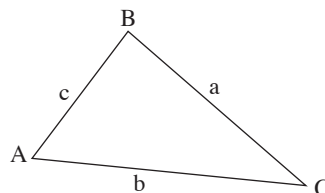
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การแก้ปัญหา
3. การเชื่อมโยง

กฎของโคไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\hat{A} = 60^\circ$, $b = 40$ และ $c = 60$ จงหา a

ดังนั้น

$$a = 20\sqrt{7}$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $a = 4$, $b = 2\sqrt{19}$ และ $c = 6$ จงหา $\hat{B}$

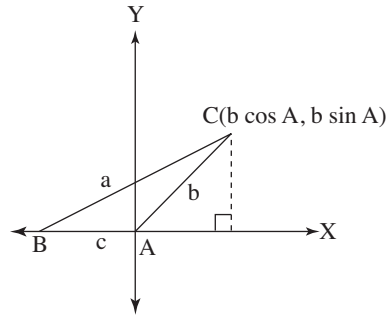
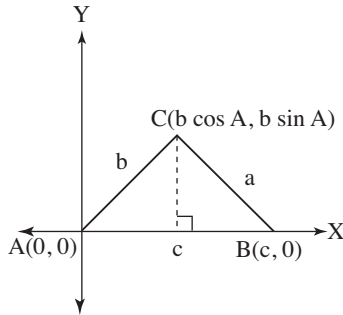
วิธีทำ จากกฎของโคไซน์

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$



กฎของไซน์ ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใด ๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$



$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม } ABC &= \frac{1}{2} \times b \sin A \times c \\ &= \frac{1}{2} bc \sin A \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $\hat{A} = 45^\circ, \hat{C} = 60^\circ$ และ $b = 20$ จงหา c และพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

ตัวอย่างที่ 4 จงหาความยาวด้าน a เมื่อ $b = 2, c = \sqrt{2}$ และ $A = 45^\circ$



ตัวอย่างที่ 5 จงหาความยาวด้าน c เมื่อ $a = 8$, $b = 10$ และ $C = 120^\circ$

ตัวอย่างที่ 6 จงหาขนาดของมุม B เมื่อ $a = 3$, $b = 4$ และ $c = 5$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด $\triangle ABC$ จงหา ด้าน a และ b เมื่อ $c = \sqrt{2}$, $A = 60^\circ$ และ $B = 45^\circ$

ตัวอย่างที่ 8 กำหนด $\triangle ABC$ จงหา ด้านและมุมที่เหลือ เมื่อ $C = 60^\circ$, $b = 2\sqrt{3}$, $c = 3\sqrt{2}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาพื้นที่ $\triangle ABC$ เมื่อกำหนดให้ $B = 60^\circ$, $a = 14$, $c = 12$

ตัวอย่างที่ 10 จงหา a ถ้า $b = 20$, $c = 30$, $A = 60^\circ$

ตัวอย่างที่ 11 จงหา B ถ้า $a = 25$, $b = 75$, $c = 60$

ตัวอย่างที่ 12 จงหา b เมื่อ $C = 45^\circ$, $B = 60^\circ$, $c = \sqrt{6}$



9. การหาระยะทางและความสูง

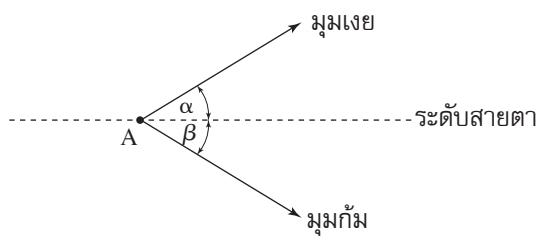
จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถใช้ความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันตรีโกณมิติในการแก้ปัญหา

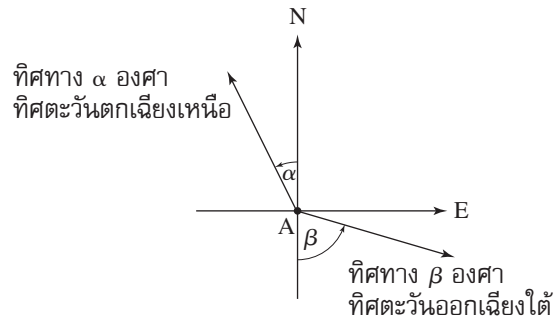
ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การแก้ปัญหา
3. การเชื่อมโยง
4. ความคิดสร้างสรรค์

มุมก้ม มุมเงย



การวัดมุม



แบบฝึกหัดที่ 12

- (1) ณ จุดหนึ่งบนพื้นราบ ชายคนหนึ่งมองเห็นยอดไฟระพีบนเสาส่งโทรทัศน์ เป็นมุมเงย 30 องศา เมื่อเขาเดินตรงเข้าไปหาเสานั้นเป็นระยะ 50 เมตร แล้วมองดูยอดไฟระพีเห็นเป็นมุมเงย 60 องศา จงหาว่า เสาส่งโทรทัศน์นี้สูงเท่าไร

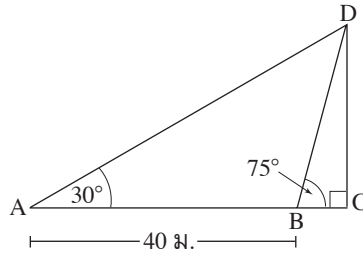
(2) เสาธงต้นหนึ่งถูกพายุพัดหัก ยอดเสาหักค้างงอลงมาจดพื้นทำมุมก้มกับพื้นราบ 45 องศา ปลายยอดเสาอยู่ห่างจากโคนเสา 30 ฟุต จงหาว่า เสาธงนี้สูงเท่าไร

3) นาย A ยืนอยู่บนอาคารสูง 80 เมตรจากระดับน้ำทะเล มองเห็นเรือ 2 ลำในทะเล ซึ่งอยู่ในแนวเดียวกันกับอาคาร พบว่าเป็นมุมก้ม 60° และ 45° ตามลำดับ จงหาระยะห่างระหว่างเรือทั้งสองลำ

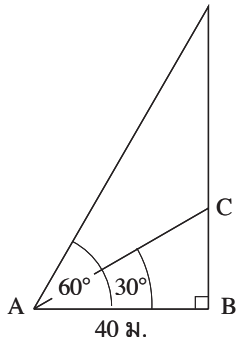


4. ที่จุดจุดหนึ่งมองเห็นยอดเสาไฟฟ้าแรงสูงเป็นมุมเงย 30° เมื่อเดินตรงเข้าไปยังเสาไฟฟ้าแรงสูงต้นนั้นเป็นระยะทาง 40 เมตร จะมองเห็นยอดเสาไฟฟ้าแรงสูงเป็นมุมเงย 75° จงหาว่าเสาไฟฟ้าแรงสูงต้นนั้นสูงเท่าไร

วิธีทำ ให้ A เป็นจุดที่มองยอดเสาไฟฟ้าแรงสูงครั้งแรกเป็นมุมเงย 30°
 B เป็นจุดที่มองยอดเสาไฟฟ้าแรงสูงครั้งที่สองเป็นมุมเงย 75°
 CD เป็นความสูงของเสาไฟฟ้าแรงสูง



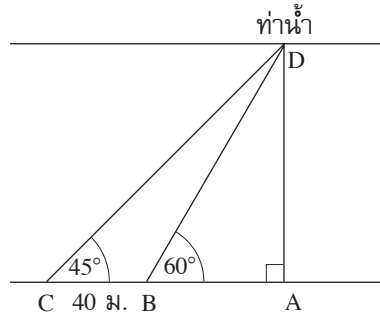
5. ณ ที่จุดหนึ่งซึ่งห่างจากชั้นล่างของตึกหลังหนึ่งในแนวราบ 40 เมตร มองเห็นยอดตึกและปลายเสาอากาศซึ่งตั้งอยู่บนยอดตึกเป็นมุม 30° และ 60° ตามลำดับ จงหาว่าเสาอากาศสูงเท่าไร



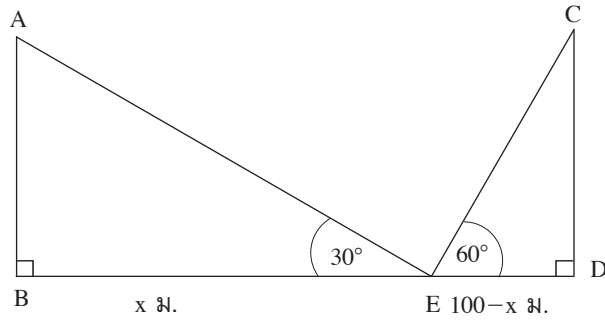
ให้ A เป็นจุดสังเกต ห่างจากตึกในแนวราบที่จุด B
 ดังนั้น $AB = 40$ เมตร
 BC เป็นความสูงของตึก
 CD เป็นความสูงของเสาอากาศ
 ในรูปสามเหลี่ยม ABC ;



6. ในการสำรวจความกว้างของแม่น้ำ ข้า ยืนสำรวจครั้งแรกที่จุด A ซึ่งอยู่ตรงข้ามกับทำนน้ำ เมื่อเดินบนถนนเลียบแม่น้ำไปที่จุด B มองเห็นทำนน้ำเป็นมุม 60° และเดินต่อไปอีก 40 เมตร ที่จุด C มองเห็นทำนน้ำเป็นมุม 45° จงหาความกว้างของแม่น้ำ



7. เสาไฟฟ้า 2 ต้น สูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 100 เมตร ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนพื้นราบระหว่างเสาไฟฟ้าทั้งสอง ณ จุดที่ยืนมองเห็นเสาไฟฟ้า 2 ต้น เป็นมุมเงย 30° และ 60° จงหาว่าชายคนนี้นั้นยืนอยู่ ณ ตำแหน่งใด และเสาไฟฟ้าทั้งสองสูงเท่าไร





เมทริกซ์



สาระและผลการเรียนรู้

สาระจำนวนและพีชคณิต

ใช้นิพจน์ สมการ อสมการและเมทริกซ์ อธิบายความสัมพันธ์ หรือ ช่วยแก้ปัญหาที่กำหนดให้

ผลการเรียนรู้

1. เข้าใจความหมาย หาผลลัพธ์ของการบวกเมทริกซ์ การคูณเมทริกซ์ กับจำนวนจริง การคูณระหว่างเมทริกซ์ และหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยน หาคู่เทอรัมน์แนตซ์ของเมทริกซ์ $n \times n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่ไม่เกินสาม
2. หาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ 2×2
3. แก่ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผันและการดำเนินการตามแถว

เมทริกซ์เป็นการนำเสนอข้อมูลและจัดการข้อมูลในรูปตาราง เมทริกซ์ใช้ในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการวางแผนการทำงานหรือวางแผนเพื่อตัดสินใจ นอกจากนี้ยังนำความรู้เรื่องเมทริกซ์ไปใช้ในการจัดการข้อมูลในเทคโนโลยีต่างๆ



1. เมทริกซ์

ตรงกับหัวข้อ 2.1 ของ สสวท. หน้า 142

จุดประสงค์

1. นักเรียนสามารถบอกมิติและใช้บทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์
2. นักเรียนสามารถหาผลบวกของเมทริกซ์กับเมทริกซ์ได้
3. นักเรียนสามารถหาผลคูณของเมทริกซ์กับจำนวนจริงได้
4. นักเรียนสามารถหาผลคูณของเมทริกซ์กับเมทริกซ์ได้
5. นักเรียนสามารถหาเมทริกซ์สลับเปลี่ยนได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนที่เขียนเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยเขียนอยู่ภายในเครื่องหมาย

[]



บทนิยาม

ใช้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก ชุดของจำนวนจริง mn จำนวน ซึ่งเขียนเรียงกันดังรูป

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า **เมทริกซ์ (matrix)** ชุดของสมาชิกในแนวนอนเรียกว่า **แถว (row)** สมาชิกในแนวตั้ง เรียกว่า **หลัก (column)** ซึ่งมี m แถว และ n หลัก และเรียก a_{ij} ว่าเป็น **สมาชิก (entry)** ในแถวที่ i และหลักที่ j ของเมทริกซ์ หรือสมาชิกในตำแหน่งที่ ij ของเมทริกซ์ เมื่อ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ เมทริกซ์ที่มี m แถว และ n หลัก เรียก $m \times n$ ว่า **ขนาด (size) หรือมิติ (dimension)** ของเมทริกซ์

ในการกล่าวถึงเมทริกซ์จะใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ $A, B, C, \dots$ แทนเมทริกซ์ และใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก $a, b, c, \dots$ แทนสมาชิกของเมทริกซ์



เช่น

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \text{ เป็น } 2 \times 3 \text{ เมทริกซ์}$$

a_{ij} เป็นสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j หรือเป็นสมาชิกในตำแหน่งที่ ij

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ หมายถึง เมทริกซ์ A เป็น $m \times n$ เมทริกซ์ที่สมาชิกในตำแหน่งที่ ij เป็น a_{ij} เมื่อ $i = 1, 2, \dots, m$ และ $j = 1, 2, \dots, n$



แบบฝึกหัดที่ 1

1. จงบอกมิติของเมทริกซ์ต่อไปนี้

เมทริกซ์	มิติ	เมทริกซ์	มิติ
(1) $[1]$		(2) $[8 \ 5]$	
(3) $\begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$		(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$	
(5) $[1 \ 6 \ 5]$		(6) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$	
(7) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		(8) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 6 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$	
(9) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 1 & 7 & -1 \end{bmatrix}$		(10) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$	
(11) $[0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0]$		(12) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$	

2. จงบอกสมาชิกของเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$

$$(1) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \dots \quad a_{12} = \dots \quad a_{13} = \dots$$

$$a_{21} = \dots \quad a_{22} = \dots \quad a_{23} = \dots$$

$$a_{31} = \dots \quad a_{32} = \dots \quad a_{33} = \dots$$

$$(2) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 7 & 5 \\ 8 & 4 & 0 & 9 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = \dots \quad a_{21} = \dots \quad a_{31} = \dots \quad a_{41} = \dots$$

$$a_{12} = \dots \quad a_{22} = \dots \quad a_{32} = \dots \quad a_{42} = \dots$$

$$a_{13} = \dots \quad a_{23} = \dots \quad a_{33} = \dots \quad a_{43} = \dots$$

$$a_{14} = \dots \quad a_{24} = \dots \quad a_{34} = \dots \quad a_{44} = \dots$$

$$a_{15} = \dots \quad a_{25} = \dots \quad a_{35} = \dots \quad a_{45} = \dots$$



1.1 การเท่ากันและพีชคณิตของเมทริกซ์



บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$

A เท่ากับ B ก็ต่อเมื่อ $m = p, n = q, a_{ij} = b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$

และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ และเขียนแทน A เท่ากับ B ด้วย $A = B$

ตัวอย่างเมทริกซ์ที่เท่ากัน

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{9} \\ 4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 2 & \sqrt{9} \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

เรากล่าวว่า $A = B$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ (\sqrt{2})^2 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1^2 & 2 & (\sqrt{3})^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

เรากล่าวว่า $A = B$



☑️ หมายเหตุ

1. เมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีมิติต่างกันจะไม่เท่ากัน
2. เมทริกซ์สองเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกันแต่สมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันต่างกันเพียง 1 ตัว เมทริกซ์ทั้งสองจะไม่เท่ากัน

ตัวอย่างเมทริกซ์ที่ไม่เท่ากัน

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ x, y และ z ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} x-3 & y+2 \\ z+1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ จากบทนิยามการเท่ากันของเมทริกซ์ สมการนี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$x-3 = 4 \qquad y+2 = 5 \qquad \text{และ} \qquad z+1 = 0$$

$$x = 7 \qquad y = 3 \qquad \text{และ} \qquad z = -1$$

ดังนั้น ค่าของ x เท่ากับ 7

ค่าของ y เท่ากับ 3

ค่าของ z เท่ากับ -1

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 2

1. จงหาค่าของ x, y และ z ที่ทำให้
$$\begin{bmatrix} -3+y & z-1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 5 & x+2 & 2 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่าของ x, y, z และ t ที่ทำให้

$$\begin{bmatrix} 1 & x-3 & y+5 \\ -5 & -6 & 9 \\ 8 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -5 & -6 & z^2 \\ 2t & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

3. จงหาค่าของ x และ y ที่ทำให้
$$\begin{bmatrix} x-2y \\ 2x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$



4. จงหา (x, y) ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} 2x-y \\ 4x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

1.2 การบวกเมทริกซ์

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน ผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ B คือเมทริกซ์ $[c_{ij}]_{m \times n}$

เมื่อ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ และเขียนแทน A บวกกับ B ด้วย $A+B$

นั่นคือ $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 2

กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $A+B$

(2) $(A+B)+C$

หมายเหตุ

1. เมทริกซ์สองเมทริกซ์บวกกันได้เมื่อเมทริกซ์ทั้งสองมีมิติเดียวกัน การหาผลบวกให้นำสมาชิกของเมทริกซ์ทั้งสองที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน
2. เมทริกซ์ที่มีมิติต่างกันไม่สามารถบวกกันได้



แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาคำตอบ

$$(1) [2 \ -3] + [-5 \ 4]$$

$$(2) [5 \ -2] + [6 \ 1]$$

$$(3) \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(8) \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 12 & -6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 3 & 0 \\ -14 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(9) \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 2 & -3 & 4 \\ -5 & -2 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & 1 & -4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(10) \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. จงหาค่าของตัวแปร

$$(1) \quad [x \ 2] + [-1 \ y] = [3 \ 7]$$

$$(2) \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{bmatrix} 2 & 3x \\ 4y & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -x \\ 16 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4x & 9 \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{bmatrix} 3x & 5 & z \\ 5 & -2 & t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -3y & -x+y \\ 4 & -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 9 & -5 & x+y-z \end{bmatrix}$$



1.3 การคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $c =$ เป็นจำนวนจริง

ผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A คือเมทริกซ์ $[b_{ij}]_{m \times n}$ เมื่อ $b_{ij} = ca_{ij}$ สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ เขียนแทนผลคูณของ c กับเมทริกซ์ A ด้วย cA

นั่นคือ $c[a_{ij}]_{m \times n} = [ca_{ij}]_{m \times n}$

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา $3A$ และ $\frac{1}{2}A$

บทนิยาม

ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาดเท่ากัน เมทริกซ์ A ลบด้วยเมทริกซ์ B คือผลบวกของเมทริกซ์ A กับเมทริกซ์ $-B$ เขียนแทนด้วย $A - B$ นั่นคือ $A - B = A + (-B)$

ตัวอย่างที่ 4

 $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ จงหาเมทริกซ์ $3A+2B$ และ $3A-2B$

บทนิยาม

เมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และสมาชิกทุกตำแหน่งเป็น 0 เรียกว่า **เมทริกซ์ศูนย์** เขียนแทนด้วย $0_{m \times n}$ หรือ 0

สมบัติการบวกเมทริกซ์และการคูณเมทริกซ์กับจำนวนจริง เมื่อ $A, B, C, 0$ เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ $m \times n$ และ c, d เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $A+B$ มีมิติ $m \times n$
2. $A+B = B+A$ (การสลับที่)
3. $A+(B+C) = (A+B)+C$ (การเปลี่ยนหมู่)
4. $A+0 = 0+A = A$ (การมีเอกลักษณ์การบวก)
5. $A+(-A) = (-A)+A = 0$ (การมีอินเวอร์สการบวก)
6. $c(A+B) = cA+cB$
7. $(c+d)A = cA+dA$
8. $(cd)A = c(dA)$
9. $1A = A$
10. $0A = 0$

0 เป็นเอกลักษณ์การบวก
ภายในเซตของเมทริกซ์ $m \times n$
 $-A$ เป็นอินเวอร์สการบวกของ A





ตัวอย่างที่ 5 จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $X + \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$

วิธีทำ ให้เมทริกซ์ X มีมิติ 2×3 จะได้ว่า

แบบฝึกหัดที่ 4

1. จงบอกสมบัติในแต่ละข้อ

$$(1) ([a \ b] + [c \ d]) + [-a \ -b] = [a \ b] + ([c \ d] + [-a \ -b])$$

$$(2) [1 \ 2] + ([3 \ 4] + [-1 \ -2]) = [1 \ 2] + ([-1 \ -2] + [3 \ 4])$$

$$(3) [5 \ 2] + ([-5 \ -2] + [0 \ 4]) = ([5 \ 2] + [-5 \ -2]) + [0 \ 4]$$

$$(4) [0 \ 0] + [7 \ 8] = [7 \ 8]$$

$$(5) ([a \ b] + [c \ d]) + [0 \ 0] = [a \ b] + [c \ d]$$

2. จงเขียนเมทริกซ์เอกลักษณ์การบวกและเมทริกซ์ผกผันการบวกของเมทริกซ์ที่กำหนด

เมทริกซ์	เมทริกซ์เอกลักษณ์การบวก	เมทริกซ์ผกผันการบวก
(1) $[-3 \ 7]$		
(2) $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$		
(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$		
(4) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 4 & 0 & -6 \end{bmatrix}$		
(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$		
(6) $\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$		
(7) $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		
(8) $\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$		



3. จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้สมการเป็นจริง

$$(1) \quad X + \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad X + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 7 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad X - \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & 3 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

จงแก้สมการ $2X - A = 3B$ สำหรับเมทริกซ์ X ที่มีมิติ 2×3

1.4 การคูณเมทริกซ์

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{p \times q}$ แล้วผลคูณของเมทริกซ์ A และ B เขียนแทนด้วย AB นิยามได้ ก็ต่อเมื่อ $n = p$ และ AB มีขนาด $m \times q$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i หลักที่ j เป็น $a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$ สำหรับ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, q\}$

กำหนดเมทริกซ์ A และ B เราสามารถหา AB ได้ ก็ต่อเมื่อ A มีจำนวนหลักเท่ากับจำนวนแถวของ B เท่านั้น



เช่น กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ มีขนาด 2×2 (มี 2 หลัก)

$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ มีขนาด 2×3 (มี 2 แถว)

ดังนั้น เราสามารถหา AB ได้

ถ้า $AB = C$ แล้วเมทริกซ์ C จะมีขนาด 2×3

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

ถ้ากำหนดให้ $AB = C$

$$\text{เขียนแทนด้วย} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix}$$

ขั้นตอนการหาสมาชิกในเมทริกซ์ผลคูณ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

1. คูณแถวที่ 1 ของ A กับหลักที่ 1 ของ B

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} \quad \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = (3)(1) + (2)(-2) = -1$$

2. คูณแถวที่ 1 ของ A กับหลักที่ 2 ของ B

$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \quad \begin{bmatrix} \dots & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$c_{12} = (3)(0) + (2)(6) = 12$$

3. คูณแถวที่ 1 ของ A กับหลักที่ 3 ของ B

$$c_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \quad \begin{bmatrix} \dots & \dots & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$c_{13} = (3)(-3) + (2)(7) = 5$$

4. คูณแถวที่ 2 ของ A กับหลักที่ 1 ของ B

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} \quad \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$c_{21} = (5)(1) + (4)(-2) = -3$$

5. คูณแถวที่ 2 ของ A กับหลักที่ 2 ของ B

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

$$c_{22} = (5)(0) + (4)(6) = 24$$

$$\begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

6. คูณแถวที่ 2 ของ A กับหลักที่ 3 ของ B

$$c_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23}$$

$$c_{23} = (5)(-3) + (4)(7) = 13$$

$$\begin{bmatrix} \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } A &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 6 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 12 & 5 \\ -3 & 24 & 13 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

☑หมายเหตุ

ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์

A^1 หมายถึง A

A^k หมายถึง AA^{k-1} เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1

จะได้ว่า

$$A^2 = AA$$

$$A^3 = AA^2 = A(AA)$$



แบบฝึกหัดที่ 5

1. จงบอกมิติของเมทริกซ์ผลคูณถ้าหาผลคูณได้

เมทริกซ์×เมทริกซ์	แนวคิด	มิติของเมทริกซ์ผลคูณ
(1) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} [3 \ 4]$		
(2) $[5] [1 \ 2 \ 3]$		
(3) $[1 \ 2] [3 \ 4]$		
(4) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$		
(5) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ -5 \\ -6 \end{bmatrix}$		
(6) $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} [1 \ 2 \ 0]$		
(7) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} [1 \ 2]$		
(8) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$		

2. จงหาเมทริกซ์ผลคูณ

$$(1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} [2 \ -1 \ 4] =$$

=

$$(2) [1 \ 2 \ 3] \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} =$$

=

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} =$$

=

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} =$$

=

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

=

=

3. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

จงระบุว่าข้อใดเป็นจริง (T) ข้อใดเป็นเท็จ (F)

(1) $A(BC) = (AB)C$

(2) $AC = 0$

(3) $BC = 0$

(4) $CB = 0$

(5) $AB = BA$

(6) $AC = CA$

(7) $BC = CB$

(8) $A+(B+C) = (A+B)+C$

(9) $A(B+C) = (B+C)A$

(10) $(2A)C = A(2C)$

(11) $-AB = A(-B)$

(12) $A(B+C) = A(C+B)$

(13) $A(B+C) = AB+AC$

(14) $B^2 = (-B)^2$

(15) $B^2+B = B(B+I)$

(16) $AC+C^2 = (A+C)C$

(17) $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$

(18) $(A+C)^2 = A^2+2AC+C^2$

(19) $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$

(20) $(B+C)^2 = B^2+BC+CB+C^2$



1.5 เมทริกซ์เอกลักษณ์

บทนิยาม

สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ ให้ I_n เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่งมีสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ i เป็น 1 สำหรับทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และสมาชิกในแถวที่ i และหลักที่ j เป็น 0 เมื่อ $i \neq j$ เรียก I_n ว่า **เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix)** ขนาด $n \times n$

$$I_1 = [1]$$

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

เพื่อความสะดวกอาจเขียน I_n เป็น I

ถ้า A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ แล้ว $IA = AI = A$

เช่น

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม

เมทริกซ์จัตุรัส (square matrix) คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก

1.6 เมทริกซ์สลับเปลี่ยน

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ถ้า $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ โดยที่ $b_{ij} = a_{ji}$ ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ เรียกเมทริกซ์ B ว่า **เมทริกซ์สลับเปลี่ยน (transpose of a matrix)** ของ A เขียนแทนด้วย A^t

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^t =$

ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ แล้ว $B^t =$

ถ้า $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ แล้ว $C^t =$

แถวที่ 1 ของ A เป็นหลักที่ 1 ของ A^t
แถวที่ 2 ของ A เป็นหลักที่ 2 ของ A^t



ข้อสังเกต

ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ แล้ว A^t จะเป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times m$

สมบัติของเมทริกซ์ที่เกี่ยวข้องกับการคูณและเมทริกซ์สลับเปลี่ยน

ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, $B = [b_{ij}]_{n \times p}$, $C = [c_{ij}]_{p \times q}$ แล้ว

- $(AB)C = A(BC)$
- $\underline{0}_{r \times m}A = \underline{0}_{r \times n}$, $A\underline{0}_{n \times p} = \underline{0}_{m \times p}$
- $I_m A = A$, $A I_n = A$
- $(cA)B = A(cB) = c(AB)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
- $A(B+D) = AB+AD$ เมื่อ D เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times p$ (มิติเดียวกันกับ B)
- $(A+E)B = AB+EB$ เมื่อ E เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$ (มิติเดียวกันกับ A)
- $(A+F)^t = A^t + F^t$ เมื่อ F เป็นเมทริกซ์ขนาด $m \times n$
- $(AB)^t = B^t A^t$
- $(A^t)^t = A$
- $(cA)^t = cA^t$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง



แบบฝึกหัดที่ 6

1. กำหนดเมทริกซ์ A, B, C ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

- (1) จงแสดงว่า $A(BC) = (AB)C$

ดังนั้น



(2) จงแสดงว่า $(AB)^t = B^t A^t$

วิธีทำ $AB =$

ดังนั้น

(3) จงแสดงว่า $(A^t)^t = A$

ดังนั้น



2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ จงหา

วิธีทำ (1) A^2

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

=

=

$$(2) A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -8 & 17 \end{bmatrix}$$

=

=

$$A^3 = A^2A =$$

=

=

(3) ถ้า $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ จงหา $f(A)$

$$f(A) = 2A^3 - 4A + 5I$$

2. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 ◀

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 2×2 และ 3×3 ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์

บทนิยาม

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ดีเทอร์มิแนนต์ของ A คือ $ad - bc$

เขียนแทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A ด้วย $\det(A)$ หรือ $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ **ไมเนอร์ (minor)** ของ a_{ij} คือ ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ที่ได้จากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A ออก เขียนแทนไมเนอร์ของ a_{ij} ด้วย $M_{ij}(A)$

บทนิยาม

ให้ $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ เมื่อ $n \geq 2$ **ตัวประกอบร่วมเกี่ยว (cofactor)** ของ a_{ij} คือ ผลคูณของ $(-1)^{i+j}$ และ $M_{ij}(A)$ เขียนแทนตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij} ด้วย $C_{ij}(A)$

จากบทนิยาม จะได้ $C_{ij}(A) = (-1)^{i+j} M_{ij}(A)$



ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ จงหาไมเนอร์และตัวประกอบร่วมเกี่ยวของ a_{ij}

วิธีทำ เนื่องจาก $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

แบบฝึกหัดที่ 7

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $C_{11}(A) =$

(2) $C_{12}(A) =$

(3) $C_{21}(A) =$

(4) $C_{22}(A) =$

(5) $a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A)$

(6) $a_{21}C_{21}(A) + a_{22}C_{22}(A)$

(7) $a_{11}C_{11}(A) + a_{21}C_{21}(A)$

(8) $a_{12}C_{12}(A) + a_{22}C_{22}(A)$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) =$

(2) $a_{11}C_{11}(A) + a_{21}C_{21}(A) =$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 7 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $C_{11}(A) =$

(2) $C_{12}(A) =$

(3) $C_{13}(A) =$

(4) $C_{21}(A) =$

(5) $C_{22}(A) =$

(6) $C_{23}(A) =$

(7) $C_{31}(A) =$

(8) $C_{32}(A) =$

(9) $C_{33}(A) =$

(10) $a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) =$

(11) $a_{11}C_{11}(A) + a_{21}C_{21}(A) + a_{31}C_{31}(A) =$



บทนิยาม

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } \det(A) = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

เรียกการหาดีเทอร์มิแนนต์นี้ว่า “การกระจายตามแถวที่ 1”

การหาดีเทอร์มิแนนต์อาจหาจากไมเนอร์และตัวประกอบร่วมเกี่ยวดังนี้

$$\det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A)$$

หรือ

$$\det(A) = a_{11}M_{11}(A) - a_{12}M_{12}(A) + a_{13}M_{13}(A)$$

หมายเหตุ

ที่กล่าวมาเป็นการหา $\det(A)$ โดยการกระจายตามแถวที่ 1

การหา $\det(A)$ จะหาโดยการกระจายตามแถวหรือตามหลักก็ได้

(เขียนหลักที่ 1 และ 2 ต่อจากหลักที่ 3)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$(a_{31}a_{22}a_{13}) + (a_{32}a_{23}a_{11}) + (a_{33}a_{21}a_{12}) = k$

$(a_{11}a_{22}a_{33}) + (a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32}) = h$

จะได้ว่า $\det(A) = h - k$

สมบัติของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์

1. ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ แล้ว $\det(I) = 1$

ตัวอย่างเมทริกซ์ I ที่มี $\det(I) = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. ถ้าสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของเมทริกซ์ A เป็น 0 แล้ว $\det(A) = 0$

ตัวอย่างเมทริกซ์ A ที่มี $\det(A) = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -2 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. ถ้าเมทริกซ์ B ได้จากการสลับแถว 2 แถว หรือสลับหลัก 2 หลักของเมทริกซ์ A แล้ว $\det(B) = -\det(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = 25 \text{ จะได้ } \det(B) = -25 \text{ และ } \det(C) = -25$$

4. ถ้าสมาชิกใน 2 แถว หรือ 2 หลักใดของเมทริกซ์ A เหมือนกันแล้ว $\det(A) = 0$

ตัวอย่างเมทริกซ์ A ที่มีสมาชิกใน 2 แถว หรือ 2 หลักเท่ากัน

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ข้างต้นเท่ากับ 0

5. $\det(A^t) = \det(A)$

เช่น $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \det(A) =$

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \det(A^t) =$$



6. ถ้าเมทริกซ์ B เกิดจากการคูณสมาชิกทุกตัวในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งของ A ด้วยค่าคงตัว c แล้ว $\det(B) = c \det(A)$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 9 & 8 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. $\det(kA) = k^n \det(A)$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว n มาจาก $n \times n$ เมทริกซ์

เช่น (1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, \det(A) =$

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 15 & 12 \end{bmatrix}, \det(3A) =$$

$$\det(3A) =$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \det(A) =$

$$2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \det(2A) =$$

$$\det(2A) =$$

8. $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$

เช่น กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\det(AB) =$$

$$\det(A) \cdot \det(B) =$$

9. ถ้าสมาชิกของเมทริกซ์ A ในแถวใดแถวหนึ่งหรือหลักใดหลักหนึ่งเขียนในรูปผลบวกของจำนวนสองจำนวน แล้ว $\det(A)$ เท่ากับผลบวกของดีเทอร์มิแนนต์

เช่น
$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \\ 7 & 3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$=$

10. $\det(A^n) = (\det(A))^n$

เช่น $A^2 =$

$\det(A^2) =$

$\det(A) =$

$(\det(A))^2 =$

11. ถ้า $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $a_{ij} = 0$ เมื่อ $i > j$ แล้ว $\det(A) = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$
 และถ้า $B = [b_{ij}]_{n \times n}$ โดยที่ $b_{ij} = 0$ เมื่อ $i < j$ แล้ว $\det(B) = b_{11} b_{22} b_{33} \dots b_{nn}$

เช่น
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$



ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\det(A)$ เมื่อกำหนด

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & -3 & 12 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

วิธีทำ $\det(A) = a_{11}M_{11}(A) - a_{12}M_{12}(A) + a_{13}M_{13}(A) - a_{14}M_{14}(A)$

แบบฝึกหัดที่ 8

1. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$ จงหา

$$(1) C_{11}(A) = (-1)^{1+1}M_{11}(A) = 1 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(2) C_{12}(A) = (-1)^{1+2}M_{12}(A) = (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(3) C_{13}(A) = (-1)^{1+3}M_{13}(A) = \dots 1 \dots \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(4) C_{21}(A) = (-1)^{2+1}M_{21}(A) = \dots (-1) \dots \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(5) C_{22}(A) = (-1)^{2+2}M_{22}(A) = \dots 1 \dots \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(6) C_{23}(A) = (-1)^{2+3}M_{23}(A) = \dots (-1) \dots \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(7) C_{31}(A) = (-1)^{3+1}M_{31}(A) = \dots 1 \dots \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(8) C_{32}(A) = (-1)^{3+2}M_{32}(A) = \dots (-1) \dots \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(9) C_{33}(A) = (-1)^{3+3}M_{33}(A) = \dots 1 \dots \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$



$$(10) \det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{12}C_{12}(A) + a_{13}C_{13}(A) \text{ (กระจายตามแถวที่ 1)}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$(11) \det(A) = a_{11}C_{11}(A) + a_{21}C_{21}(A) + a_{31}C_{31}(A) \text{ (กระจายตามหลักที่ 1)}$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$= \dots\dots\dots$$

2. จงหา $\det(A)$ เมื่อกำหนด

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -11 \\ 5 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$



$$(2) A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$



$$(4) A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(5) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

3. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

(1) กำหนด $A = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 8 \\ -9 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

(2) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

(3) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

(4) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & -9 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

(5) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -7 & 8 & -9 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

(6) กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A) = \dots\dots\dots$

4. จงเติมคำตอบในช่องว่าง

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(A) = \dots\dots\dots$

(2) $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(B) = \dots\dots\dots$

(3) $AB = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(AB) = \dots\dots\dots$

(4) $(AB)^t = \begin{bmatrix} -10 & 20 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(AB)^t = \dots\dots\dots$

(5) $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ $\det(A^t) = \dots\dots\dots$



$$(6) \quad B^t = \begin{bmatrix} \dots & 2 & 4 \\ \dots & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(B^t) = \dots$$

$$(7) \quad B^t A^t = \begin{bmatrix} \dots & -10 & 20 \\ \dots & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \det(B^t A^t) = \dots$$

สรุปผลที่ได้จากข้างต้นดังนี้

$$\det(A^t) = \dots$$

$$\det(AB)^t = \dots$$

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} -3 & a^2 \\ a & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\det(AB^t) = -132$ จงหา $\det(A+B)$



6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $C_{12}(A) = 4$ แล้ว $\det(2A)$ มีค่าเท่าไร



3. เมทริกซ์ผกผัน

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาเมทริกซ์ผกผันขนาด 2×2 และ 3×3 ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง



สำหรับ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ จะได้ $\frac{1}{x} \in \mathbb{R} - \{0\}$ และมีสมบัติว่า $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$

กล่าวได้ว่า $\frac{1}{x}$ เป็นตัวผกผันการคูณของ x



บทนิยาม

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

ถ้า X เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ซึ่ง $AX = XA = I_n$ แล้วจะเรียก X ว่าเมทริกซ์ผกผันหรือตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย A^{-1}



ข้อสังเกต

จำนวนจริงทุกจำนวนที่ไม่เท่ากับ 0 มีอินเวอร์สการคูณ แต่เมทริกซ์ที่ไม่เท่ากับ 0 บางเมทริกซ์อาจไม่มีอินเวอร์สการคูณ



ทฤษฎีบท

ถ้า A มีเมทริกซ์ผกผันแล้วเมทริกซ์ผกผันของ A จะมีเพียงเมทริกซ์เดียวเท่านั้น

เมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ทฤษฎีบท

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } ad-bc \neq 0$$

 ข้อสังเกต

1. เนื่องจาก $\det(A) = ad-bc$ ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ เมื่อ $\det(A) \neq 0$
2. ถ้า $\det(A) = 0$ แล้ว เมทริกซ์ A จะไม่มีเมทริกซ์ผกผัน

แบบฝึกหัดที่ 9

1. จงหาเมทริกซ์ $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ ที่ทำให้สมการ $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นจริง



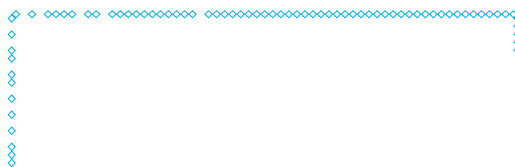
2. จงหาอินเวอร์สของเมทริกซ์ที่กำหนดต่อไปนี้โดยใช้สูตร

กำหนด $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, ad-bc \neq 0$

(1) $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

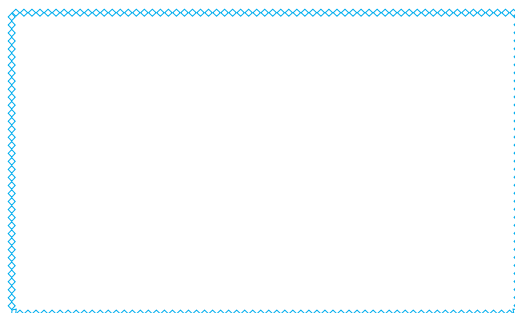
$ad-bc = \dots(-4)(-1)-(2)(3) = -2$

$A^{-1} =$



๐๐๓

(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -9 & 5 \end{bmatrix}$





$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. จงหาเมทริกซ์ X ที่ทำให้ $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$



บทนิยาม

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$

A เป็น**เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix) เมื่อ $\det(A) = 0$

A เป็น**เมทริกซ์ไม่เอกฐาน** (non-singular matrix) เมื่อ $\det(A) \neq 0$

เช่น

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \det(A) = -40$$

A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \det(A) = 0$$

B เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

บทนิยาม

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ **เมทริกซ์ผกผัน** (adjoint matrix) ของ A คือเมทริกซ์ $[C_{ij}(A)]^t$ เขียนแทนเมทริกซ์ผกผันของ A ด้วย $\text{adj}(A)$

$$\text{เช่น} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{12}(A) & C_{13}(A) \\ C_{21}(A) & C_{22}(A) & C_{23}(A) \\ C_{31}(A) & C_{32}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}^t$$

$$\text{หรือ} \quad \text{adj}(A) = \begin{bmatrix} C_{11}(A) & C_{21}(A) & C_{31}(A) \\ C_{12}(A) & C_{22}(A) & C_{32}(A) \\ C_{13}(A) & C_{23}(A) & C_{33}(A) \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท

ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ เมื่อ $n \geq 2$ จะได้

1. $A \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) A = \det(A) I_n$
2. A มีตัวผกผันการคูณ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

$$\text{จะได้ } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A), \det(A) \neq 0$$

ตัวอย่างที่ 1

กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} ถ้ามี



ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ จงหา A^{-1} ถ้ามี

แบบฝึกหัดที่ 10

1. กำหนดเมทริกซ์ A จงหา A^{-1} ถ้ามี

$$(1) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$



$$(2) \ A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$



$$(3) \ A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\det(A)$

(2) A^{-1}

(3) $\det(A^{-1})$

(4) $\det(A) \det(A^{-1})$

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 4 & x & -2 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน จงหา x



4. การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถแก้ระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้เมทริกซ์ผกผัน หลักเกณฑ์คราเมอร์ และการดำเนินการตามแถวได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การแก้ปัญหา
2. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
3. การเชื่อมโยง

ระบบที่ประกอบด้วยสมการเชิงเส้นตั้งแต่สองสมการขึ้นไป เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้น (system linear equations)**

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี m สมการ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นตัวแปร และ a_{ij}, b_i เป็นจำนวนจริง สำหรับ $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ และ $j \in \{1, 2, \dots, n\}$

สมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการข้างต้นคือ

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

เขียนให้อยู่ในรูป $AX = B$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ของสัมประสิทธิ์ X เป็นเมทริกซ์ของตัวแปร และ B เป็นเมทริกซ์ของค่าคงตัว

ถ้า $m = n$ และ $\det(A) \neq 0$ แล้วสามารถหาคำตอบของระบบสมการได้จาก

$$X = A^{-1}B$$

ตัวอย่างที่ 1จงแก้ระบบสมการ $x - 3y = 16$

$$2x + z = 4$$

$$y - z = -7$$

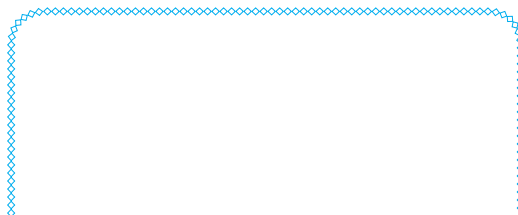


แบบฝึกหัดที่ 11

จงแก้ระบบสมการโดยใช้ตัวผกผันของเมทริกซ์

1. $2x + y = 7$

$$3x + 2y = 11$$



ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y) = \dots\dots\dots$

2. $y = 3x + 11$

$$y = 5x + 15$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y) = \dots\dots\dots$



3.

$$x+y-z = -3$$

$$x+2y+z = 7$$

$$-x+4y+z = 3$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y, z) = \dots\dots\dots$



ทฤษฎีบท

หลักเกณฑ์คราเมอร์ (Cramer's rule)

กำหนดระบบสมการเชิงเส้นที่มี n สมการ และ n ตัวแปร
โดย $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ที่สัมพันธ์กับระบบสมการ

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้วคำตอบของระบบสมการนี้คือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, \dots, x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_i คือเมทริกซ์ที่ได้จากการแทนหลักที่ i ของ A ด้วยหลักของ B ทุก $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้ระบบสมการที่กำหนดโดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์

$$x - 2y + 3z = 9$$

$$2x - 5y + 5z = 17$$

$$-x + 3y = -4$$

วิธีทำ จากระบบสมการเขียนสมการเมทริกซ์ได้ดังนี้



ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y, z) =$

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 12

จงแก้ระบบสมการที่กำหนดให้โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์

$$\begin{aligned} 1. \quad & 8x - y = 33 \\ & 5x + 3y = 17 \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y) = \dots\dots\dots$



2.

$$2x - 5y = -9$$

$$5y + 7z = 26$$

$$9x - 4z = -30$$

วิธีทำ

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ $(x, y, z) = \dots\dots\dots$



$$3. \quad \frac{x}{6} - \frac{y}{4} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{y}{5} + \frac{z}{3} = \frac{17}{15}$$

$$\frac{x}{8} - \frac{z}{4} = 1$$

ดังนั้น คำตอบของระบบสมการคือ



สรุป

เมทริกซ์

- เมทริกซ์ คือ กลุ่มของจำนวนที่เขียนเรียงเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก โดยเขียนอยู่ภายในเครื่องหมาย []
- ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเดียวกัน $A+B$ คือเมทริกซ์ที่สมาชิกแต่ละตัวเกิดจากสมาชิกที่อยู่ในตำแหน่งเดียวกันของ A และ B บวกกัน
- ถ้า c เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว cA คือเมทริกซ์ที่เกิดจากการนำ c คูณเข้าไปในสมาชิกทุกตัวของ A
- ถ้า $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ แล้ว $A \times B = AB = C = [c_{ij}]_{m \times r}$ โดยที่ $c_{ji} = a_{1j}b_{1i} + a_{2j}b_{2i} + \dots + a_{in}b_{nj}$
- เมทริกซ์สลับเปลี่ยน คือ เมทริกซ์ที่เกิดจากการนำสมาชิกในเมทริกซ์ A มาเปลี่ยนจากแถวเป็นหลักและจากหลักเป็นแถว

เมทริกซ์

ดีเทอร์มิแนนต์

เป็นสมบัติที่พบในเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น โดยแต่ละเมทริกซ์จัตุรัสจะหาดีเทอร์มิแนนต์ได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น ใช้สัญลักษณ์ $|A|$ หรือ $\det(A)$ แทนดีเทอร์มิแนนต์ของ A

เมทริกซ์ผกผัน

เมทริกซ์ใดๆ ที่นำมาคูณกับเมทริกซ์ที่สนใจแล้วได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์
เมทริกซ์ผกผันของ A ใช้สัญลักษณ์ A^{-1} หรือ $\frac{1}{A}$

การหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

- โดยใช้ตัวผกผันของเมทริกซ์
- โดยใช้หลักเกณฑ์คราเมอร์
- โดยใช้การดำเนินการตามแถว

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

ตรงกับแบบฝึกหัดท้ายบทของ สสวท. หน้า 205

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์

แล้ว A คือเมทริกซ์ใด

1. $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$ ~~X~~ $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 12 \end{bmatrix}$

2. ถ้า $2B = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์

แล้ว B คือเมทริกซ์ใด

1. $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$

~~X~~ $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & -\frac{7}{2} \end{bmatrix}$

3. ถ้า $2 \begin{bmatrix} 4 & x \\ -3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$

แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใด

~~X~~ 3 2. 4

3. 5 4. 6

4. กำหนด $2X + 3A = 4B$ ซึ่ง $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ดังนั้น X' คือเมทริกซ์ใด

1. $\begin{bmatrix} 11 & -\frac{11}{2} \\ -\frac{25}{2} & 7 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 11 & -\frac{11}{2} \\ -\frac{25}{2} & -11 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 11 & -\frac{19}{2} \\ -\frac{7}{2} & -11 \end{bmatrix}$ ~~X~~ $\begin{bmatrix} 17 & -\frac{11}{2} \\ -\frac{25}{2} & 7 \end{bmatrix}$

5. ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot M \cdot [7 \ 5 \ 3 \ 1]$ หาผลคูณได้

แล้ว M มีมิติเท่ากับข้อใด

1. 1×2 ~~X~~ 2×1

3. 3×1 4. 2×4

6. ถ้า $P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $Q = [0 \ 1 \ 0]$ แล้ว PQ

เท่ากับเมทริกซ์ใด

~~X~~ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. $[0 \ 0 \ 0]$



7. กำลังสองของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ คือเมทริกซ์ใด

1. $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 4 \end{bmatrix}$

~~4.~~ $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$

8. ถ้า $\begin{bmatrix} x^2-x & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

สมการใดมีค่า x สอดคล้องกับสมการข้างต้น

1. $2x^2-2x+7=0$

2. $2x^2-2x+3=0$

~~3.~~ $2x^2-2x-9=0$

4. $x^2-x-6=0$

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ A' เป็นเมทริกซ์

สลับเปลี่ยนของ A ดังนั้น AA' คือเมทริกซ์ใด

~~1.~~ $\begin{bmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix}$

10. ผลคูณของ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -10 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ คือ

เมทริกซ์ใด

~~1.~~ $\begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 21 & -14 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -14 & 0 \\ 21 & 14 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 14 & 21 \\ 0 & -14 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -14 & 21 \\ 0 & 14 \end{bmatrix}$

11. กำหนดให้ $[x \ 1] \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -5 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = [0]$

ผลบวกของค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการเท่ากับข้อใด

1. $-\frac{10}{3}$

2. $-\frac{5}{3}$

3. $\frac{5}{3}$

~~4.~~ $\frac{10}{3}$

12. ถ้า $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$ และ

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right)^{-1}$

เท่ากับข้อใด

~~1.~~ $\frac{1}{6}$

2. $\frac{1}{3}$

3. $\frac{1}{2}$

4. 1

13. กำหนด $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, $B = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ และ

$C = [c_{ij}]_{3 \times 3}$ แล้วข้อใดเป็นจริง

1. ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$

~~2.~~ $(A+B)C = AC+BC$

3. ถ้า $AB = 0$ แล้ว $A = 0$ หรือ $B = 0$

4. ถ้า $A^2 = A$ แล้ว $A = I$ หรือ $A = 0$

14. กำหนด $A = \begin{bmatrix} a+kb & b \\ c+kd & d \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(A)$

เท่ากับค่าของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ใด

~~X~~ $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

2. $k \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} ka & b \\ kc & d \end{bmatrix}$

4. $(k+1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

15. ถ้า $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ แล้วข้อใดเป็นอินเวอร์ส

การคูณของ M

1. M

2. M^2

~~X~~ M^3

4. M^4

16. ถ้า A, B เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐานและเป็นเมทริกซ์ $n \times n$ แล้วข้อใดไม่จริง

1. $(A^t)^t = A$

2. $(AB)^t = B^t A^t$

3. $(A^{-1})^{-1} = A$

~~X~~ $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$

17. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$ อินเวอร์ส

การคูณของเมทริกซ์ A เท่ากับข้อใด

~~X~~ $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -11 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 6 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -11 & 1 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

18. กำหนด $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ และ A^{-1} เป็น

อินเวอร์สการคูณของ A ดังนั้น $\det(A^{-1})$

เท่ากับข้อใด

1. -51

~~X~~ $-\frac{1}{51}$

3. $\frac{1}{51}$

4. 51

19. ดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

เท่ากับข้อใด

1. -140

~~X~~ -102

3. -101

4. -97

20. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -2 & 0 & 7 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

และ $B = \begin{bmatrix} C_{13}(A) & C_{23}(A) \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

แล้ว $\det(B^{-1})$ เท่ากับข้อใด

1. 20

2. 10

~~X~~ $\frac{1}{10}$

4. $\frac{1}{20}$

21. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ

$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ ถ้า

$(A+B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$ แล้ว $\det(A)$ เท่ากับข้อใด

1. 0.5

2. 1.5

~~X~~ 3.5

4. 4.5



22. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -9 \\ 7 & -10 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

และ B, C, D เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง

$A \sim B \sim C \sim D$ โดยที่

B ได้จาก A โดยการดำเนินการ $R_1 - \frac{4}{3}R_2$

C ได้จาก B โดยการดำเนินการ $5R_1$

D ได้จาก C โดยการดำเนินการ R_{23}

แล้ว $\det(D)$ เท่ากับข้อใด

1. $-3,750$ 2. -150

☒ 150 4. $3,750$

23. กำหนดให้ $f(x) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $x \neq 1$

ข้อใดถูกต้อง

1. f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และ

$$f^{-1}(x) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \text{ เมื่อ } x \neq 0, \\ x \neq 1$$

☒ f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และ

$$f^{-1}(x) = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{1+x} & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } x \neq -1$$

3. f ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ เนื่องจากมีค่า x

$$\text{ที่ทำให้ } \det \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

4. f ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และ

$$(f \circ f)(x) = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{1-x} & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^2 \text{ เมื่อ } x \neq 1$$

24. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & a \end{bmatrix} \text{ ถ้า } a > 10 \text{ และ}$$

$\det(\text{adj } A) = 225$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 11 2. 12

☒ 13 4. 14

25. ถ้า $\sin x = \frac{3}{5}$ และ $\tan x = -\frac{3}{4}$ แล้ว

$$\det \left(2 \begin{bmatrix} \operatorname{cosec} x & \sec x \\ 1 & \cos x \end{bmatrix} \right) \text{ เท่ากับข้อใด}$$

1. $-\frac{1}{6}$ ☒ $-\frac{1}{3}$

3. $-\frac{2}{3}$ 4. -1

26. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด

$n \times n$ และ $A = 0$ เมื่อ 0 แทนเมทริกซ์ศูนย์

ถ้า $A^2 - 2A = 0$ แล้วจงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน

(2) $\det(A)$ เป็นจำนวนเต็มคู่

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ (1) เป็นจริง ข้อ (2) เป็นจริง

2. ข้อ (1) เป็นจริง ข้อ (2) เป็นเท็จ

☒ ข้อ (1) เป็นเท็จ ข้อ (2) เป็นจริง

4. ข้อ (1) เป็นเท็จ ข้อ (2) เป็นเท็จ

27. กำหนด A เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×1 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (1) ถ้าสมการเมทริกซ์ $AX = B$ มีคำตอบ แล้วสมการเมทริกซ์ $A'X = B$ มีคำตอบ
 (2) ถ้า $A^3 = A$ และ A เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน แล้ว $A = I_2$ หรือ $A = -I_2$

ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อ (1) เป็นจริง ข้อ (2) เป็นจริง
 2. ข้อ (1) เป็นจริง ข้อ (2) เป็นเท็จ
 3. ข้อ (1) เป็นเท็จ ข้อ (2) เป็นจริง

X ข้อ (1) เป็นเท็จ ข้อ (2) เป็นเท็จ

28. กำหนดเมทริกซ์ A และ B ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & x \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -4x \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

โดยที่ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det(2A) = -76$ แล้วเมทริกซ์ C ในข้อใดทำให้ค่าของ $\det(BC)$ อยู่ในช่วง $(-100, -50)$

X 1. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

29. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x+1 & x & x+1 \\ 0 & x & x+1 \\ x+1 & -1 & x \end{bmatrix}$ และ

$B = \begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 2x & 3 \end{bmatrix}$ ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่ทำให้

$\det(A) = 0$ แล้ว $\text{adj } B$ คือเมทริกซ์ในข้อใด

1. $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ **X** 2. $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

30. ถ้า A เป็นเมทริกซ์โดยมี $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ x & 0 & -2 \end{bmatrix}$

เมื่อ $x > 0$ และ $\det(2\text{adj } A) = \frac{1}{18}$ แล้ว x เป็นจริงตามข้อใด

1. $x < 5$
 2. $5 \leq x < 19$

X 3. $9 \leq x < 13$

4. $x \geq 13$





เวกเตอร์



สาระและผลการเรียนรู้

สาระการวัดและเรขาคณิต

เข้าใจเวกเตอร์ การดำเนินการของเวกเตอร์ และนำไปใช้

ผลการเรียนรู้

1. หาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ ด้วยสเกลาร์ หาผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์
2. นำความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหา

เวกเตอร์ คือ ปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เช่น แรง ความเร็ว และความเร่ง การดำเนินการของเวกเตอร์มีดังนี้ การบวกเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถอธิบายความหมายของเวกเตอร์ได้
2. นักเรียนสามารถหาผลลัพธ์ของการบวก การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

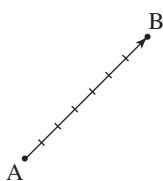
1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

บทนิยาม

ปริมาณที่มีแต่ขนาดเพียงอย่างเดียว เรียกว่า **ปริมาณสเกลาร์ (scalar quantity)**
 ส่วนปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง เรียกว่า **ปริมาณเวกเตอร์ (vector quantity)**

ปริมาณสเกลาร์แทนด้วยจำนวนจริง เรียกสั้นๆ ว่า **สเกลาร์** ปริมาณเวกเตอร์เรียกสั้นๆ ว่า **เวกเตอร์**

ปริมาณเวกเตอร์ในเชิงเรขาคณิตแทนด้วยส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง (directed segment) โดยความยาวของส่วนของเส้นตรงบอกขนาดและหัวลูกศรบอกทิศทางของเวกเตอร์



จากรูป เวกเตอร์จาก A ไป B อ่านว่า **เวกเตอร์เอบี** เขียนแทนด้วย $\vec{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$

A เป็น**จุดเริ่มต้น (initial point)** ของเวกเตอร์

B เป็น**จุดสิ้นสุด (terminal point)** ของเวกเตอร์

ความยาวของส่วนของเส้นตรง AB หรือ BA คือ ขนาดของเวกเตอร์ AB เขียนแทนด้วย $|\vec{AB}|$

จากรูป $|\vec{AB}| = 7$ หน่วย

ในกรณีที่มิได้ระบุจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดจะใช้อักษรตัวเดียวแทนเวกเตอร์ เช่น $\vec{u}$ แทนเวกเตอร์จาก A ไป B จะเขียน $\vec{u} = \vec{AB}$ และ $|\vec{u}| = |\vec{AB}|$



1.1 เวกเตอร์ที่ขนานกัน เวกเตอร์ที่เท่ากัน และนิเสธของ เวกเตอร์

บทนิยาม

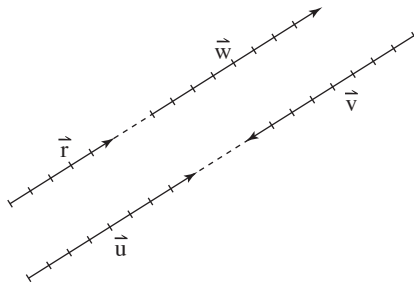
$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือมีทิศทางตรงกันข้าม

บทนิยาม

$\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$

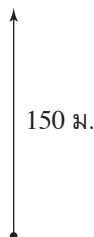
บทนิยาม

นิเสธของ $\vec{u}$ (negative of $\vec{u}$) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับทิศทางของ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$



จากรูป $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ มีทิศทางเดียวกัน โดย $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ ขนานกัน และ $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ดังนั้น $\vec{u} = \vec{v}$
 $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม และ $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ ดังนั้น $\vec{v}$ เป็นนิเสธของ $\vec{u}$ หรือ $\vec{v} = -\vec{u}$
 หรือ $\vec{u} = -\vec{v}$

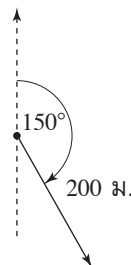
การเขียนเวกเตอร์ที่กำหนดทิศทางเป็นองศา ด้วยการบอกค่าของมุมที่วัดจากทิศเหนือไปตามเข็มนาฬิกา ซึ่งมีค่าอยู่ระหว่าง 0 ถึง 360 องศา โดยใช้ระบบตัวเลขสามตัว (three figure system) เช่น 045° , 135° ในการระบุทิศทาง



แทนปริมาณเวกเตอร์ 150 เมตร

ไปทางทิศเหนือ

มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 50 เมตร



แทนปริมาณเวกเตอร์ 200 เมตร

ไปทางทิศ 150°

มาตราส่วน 1 เซนติเมตร : 100 เมตร



แบบฝึกหัดที่ 1

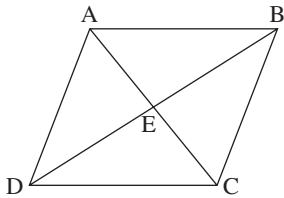
ตรงกับแบบฝึกหัด 3.1ก ของ สสวท. หน้า 219

1. จงยกตัวอย่างปริมาณสเกลาร์และปริมาณเวกเตอร์

ปริมาณสเกลาร์ ได้แก่ **มวล ระยะทาง อัตราเร็ว อุณหภูมิ ความสูง**.....

ปริมาณเวกเตอร์ ได้แก่ **แรง ความเร็ว ความเร่ง การกระจัด**.....

2. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด E



จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้

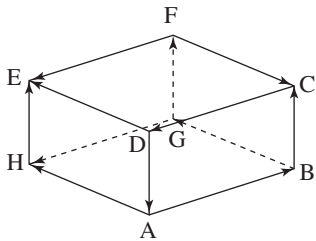
$$\vec{AD} = \vec{BC} \quad \vec{EB} = \vec{DE}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \quad \vec{DC} = \vec{AB}$$

$$\vec{DE} = \vec{EB} \quad \vec{EA} = \vec{CE}$$

$$\vec{BC} = \vec{AD} \quad \vec{CE} = \vec{EA}$$

3. กำหนดให้ ABCDEFGH เป็นทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหา



- (1) เวกเตอร์ที่ขนานกับเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$\vec{AB} \text{ ได้แก่ } \vec{CD}, \vec{FE}, \vec{GH}$$

$$\vec{BC} \text{ ได้แก่ } \vec{DA}, \vec{HE}, \vec{GF}$$

$$\vec{AH} \text{ ได้แก่ } \vec{BG}, \vec{DE}, \vec{FC}$$

- (2) เวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้

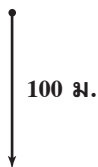
$$\vec{AH} \text{ ได้แก่ } \vec{BG}, \vec{DE}$$

$$\vec{GH} \text{ ได้แก่ } \vec{CD}, \vec{FE}$$

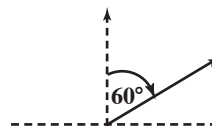
$$\vec{BC} \text{ ได้แก่ } \vec{HE}, \vec{GF}$$

4. จงเขียนส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทางแทนปริมาณเวกเตอร์

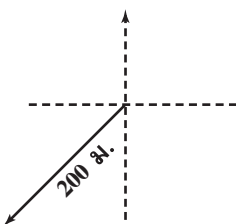
- (1) 100 เมตร ไปทางทิศใต้



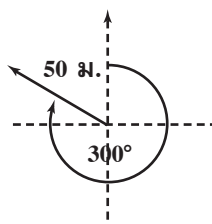
- (2) 60 เมตร ไปทางทิศ 060°



- (3) 200 เมตร ไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้

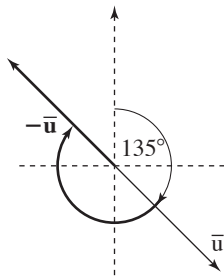


- (4) 50 เมตร ไปทางทิศ 300°





5. ถ้า $\vec{u}$ แทนการเดินทาง 80 เมตร ไปทางทิศ 135° จงบรรยายการเดินทางที่แทนด้วย $-\vec{u}$ พร้อมทั้งเขียนรูป

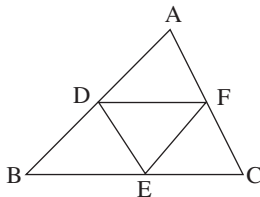


$|\vec{u}| = 80$ เมตร

$-\vec{u}$ แทนการเดินทาง 80 เมตร

ในทิศทาง $135^\circ + 180^\circ = 315^\circ$

6. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม D,E และ F เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB,BC และ CA ตามลำดับ จงหาเวกเตอร์ที่เท่ากับเวกเตอร์ต่อไปนี้



$\vec{DE} = \vec{AF} = \vec{FC}$

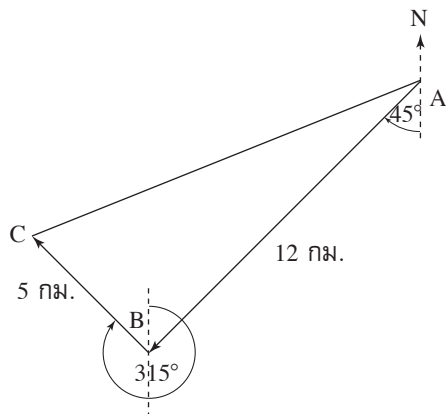
$\vec{EF} = \vec{BD} = \vec{DA}$

$\vec{FD} = \vec{CE} = \vec{EB}$

$\vec{AD} = \vec{FE} = \vec{DB}$

$\vec{AF} = \vec{DE} = \vec{FC}$

7. ชายคนหนึ่งเดินไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้เป็นระยะ 12 กิโลเมตร จากนั้นเดินไปทางทิศ 315° เป็นระยะทาง 5 กิโลเมตร ชายคนนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่กิโลเมตร



จากรูป

$\vec{AB}$ เป็นเวกเตอร์จากจุด A ไปทางทิศตะวันตกเฉียงใต้

$|\vec{AB}| = 12$

$\vec{BC}$ เป็นเวกเตอร์จากจุด B

ไปทางทิศ ตะวันตกเฉียงเหนือ

$|\vec{BC}| = 5$

จะได้ขนาดของมุม ABC เท่ากับ 90° องศา

โดยทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$= 12^2 + 5^2$

$= 169$

$AC = 13$

8. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ จงเขียน T หน้าข้อที่ถูกต้อง และเขียน F หน้าข้อที่ไม่ถูกต้อง
-T..... (1) ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
-F..... (2) ถ้า $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ แล้ว $\vec{u} = \vec{v}$
-T..... (3) ถ้า $\vec{u} = \vec{v}$ แล้ว $|\vec{u}| = |\vec{v}|$
-F..... (4) ถ้า $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ แล้ว $\vec{u} = \vec{v}$
-T..... (5) ถ้า $|\vec{u}| = 10$ แล้ว $|- \vec{u}| = 10$
-T..... (6) ถ้า $\vec{u} = -\vec{v}$ แล้ว $-\vec{u} = \vec{v}$
-F..... (7) ถ้า $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ แล้ว $\vec{u}$ ตัดกับ $\vec{v}$
-T..... (8) ถ้า $\vec{u}$ มีทิศทาง 065° แล้ว $-\vec{u}$ มีทิศทาง 245°
-T..... (9) ถ้า $-\vec{u}$ มีทิศทาง 108° แล้ว $\vec{u}$ มีทิศทาง 288°
-T..... (10) ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม แล้ว $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$

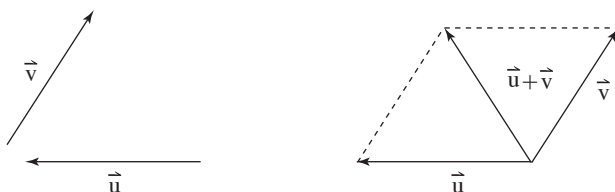
1.2 การบวกเวกเตอร์

บทนิยาม

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ เขียน $\vec{u} + \vec{v}$ ให้จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ อยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$ ผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} + \vec{v}$ คือเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่จุดเริ่มต้นของ $\vec{u}$ และมีจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดสิ้นสุดของ $\vec{v}$



อาจหาผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



เวกเตอร์ $\vec{u} + \vec{v}$ มีจุดเริ่มต้นเดียวกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ แล้ว $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$





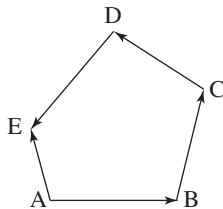
บทนิยาม

เวกเตอร์ศูนย์ (zero vector) คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเป็นศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$

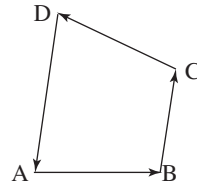
ข้อสังเกต

1. ไม่จำเป็นต้องกล่าวถึงทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์ แต่ถ้าต้องการกล่าวถึง มีข้อตกลงว่าจะระบุทิศทางของเวกเตอร์ศูนย์เป็นเช่นใดก็ได้
2. เมื่อเขียนรูปเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ศูนย์ จุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดของเวกเตอร์เป็นจุดเดียวกัน

เช่น



$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} = \vec{AE}$$

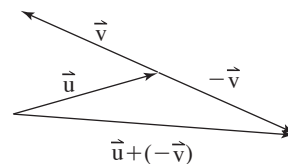
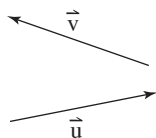


$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}$$

1.3 การลบเวกเตอร์

บทนิยาม

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ผลลบของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} - \vec{v}$ หมายถึง ผลบวกของ $\vec{u}$ และนิเสธของ $\vec{v}$ นั่นคือ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

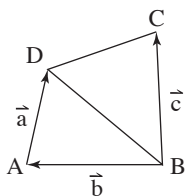




แบบฝึกหัดที่ 2

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.1 ของ สสวท. หน้า 226

1.



กำหนดให้ $\vec{AD} = \vec{a}$, $\vec{BA} = \vec{b}$ และ $\vec{BC} = \vec{c}$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$

$$(1) \vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD}$$

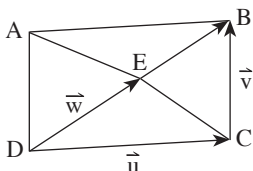
$$= \vec{b} + \vec{a}$$

$$(2) \vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BA} + \vec{AD}$$

$$= -\vec{BC} + \vec{BA} + \vec{AD}$$

$$= -\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}$$

2.



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน มี $\vec{BD}$ เป็น

เส้นเส้นทแยงมุม $\vec{DC} = \vec{u}$, $\vec{CB} = \vec{v}$ และ $\vec{DE} = \vec{w}$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

$$(1) \vec{EC} = \vec{ED} + \vec{DC}$$

$$= -\vec{DE} + \vec{DC}$$

$$= -\vec{w} + \vec{u}$$

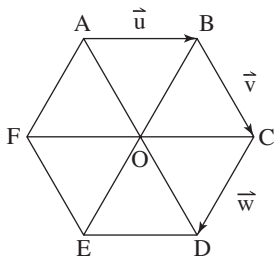
$$(2) \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CE}$$

$$= -\vec{CB} + (-\vec{EC})$$

$$= -\vec{v} - (-\vec{w} + \vec{u})$$

$$= -\vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$$

3.



กำหนดให้ ABCDEF เป็นรูปหกเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

มีเส้นทแยงมุมตัดกันที่จุด O ให้ $\vec{AB} = \vec{u}$, $\vec{BC} = \vec{v}$ และ

$\vec{CD} = \vec{w}$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$

$$(1) \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$$

$$= \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

$$(2) \vec{BE} = \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE}$$

$$= \vec{v} + \vec{w} + (-\vec{u})$$

$$= \vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$$

$$(3) \vec{FC} = \vec{FE} + \vec{ED} + \vec{DC}$$

$$= \vec{v} + \vec{u} + (-\vec{w})$$

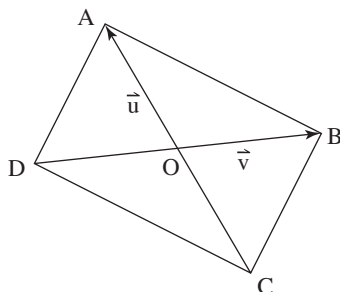
$$= \vec{v} + \vec{u} - \vec{w}$$

$$(4) \vec{AO} + \vec{EF} = \vec{AO} + (-\vec{OA})$$

$$= \vec{0}$$



4.



กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน เส้นทแยงมุมสองเส้นตัดกันที่จุด O ให้ $\vec{OA} = \vec{u}$, และ $\vec{OB} = \vec{v}$ จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

$$\begin{aligned} (1) \vec{AB} &= \vec{AO} + \vec{OB} \\ &= -\vec{OA} + \vec{OB} \\ &= -\vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{CD} &= \vec{BA} \\ &= -\vec{AB} \\ &= \vec{u} - \vec{v} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \vec{BC} &= \vec{BO} + \vec{OC} \\ &= -\vec{OB} + (-\vec{AO}) \\ &= -\vec{v} - \vec{u} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \vec{DA} &= \vec{CB} \\ &= -\vec{BC} \\ &= \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

1.4 การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

บทนิยาม

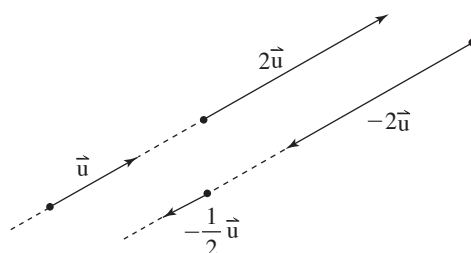
ให้ a เป็นสเกลาร์ และ $\vec{u}$ เป็นเวกเตอร์

ผลคูณของเวกเตอร์ $\vec{u}$ กับสเกลาร์ a เป็นเวกเตอร์

เขียนแทนด้วย $a\vec{u}$ โดยที่

- ถ้า $a = 0$ แล้ว $a\vec{u} = \vec{0}$
- ถ้า $a > 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ และมีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$
- ถ้า $a < 0$ แล้ว $a\vec{u}$ จะมีขนาดเท่ากับ $|a||\vec{u}|$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

เช่น





ถ้า $\bar{u}$ มีขนาด 4 หน่วย หรือ $|\bar{u}| = 4$ แล้ว

$\frac{1}{2}\bar{u}$ มีขนาด 2 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

$2\bar{u}$ มีขนาด 8 หน่วย และมีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$

$-\frac{1}{4}\bar{u}$ มีขนาด 1 หน่วย แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$

$(-1)\bar{u}$ มีขนาด 4 หน่วย แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\bar{u}$

$$(-1)\bar{u} = -\bar{u}$$



สมบัติการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

ให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ

a และ b เป็นจำนวนจริง

- $a\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ
- $(ab)\bar{u} = a(b\bar{u}) = b(a\bar{u})$
- $1\bar{u} = \bar{u}$
- $(a+b)\bar{u} = a\bar{u} + b\bar{u}$ (สมบัติการแจกแจง)
- $a(\bar{u} + \bar{v}) = a\bar{u} + a\bar{v}$ (สมบัติการแจกแจง)

ทฤษฎีบทที่สำคัญเกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ที่สามารถนำไปประยุกต์ใช้กับเรขาคณิตมีดังนี้

ทฤษฎีบท

สำหรับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\bar{0}$, $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้ $\bar{u} = a\bar{v}$

พิสูจน์ (1) ให้ $\bar{u}$ ขนานกับ $\bar{v}$ และต่างก็ไม่เท่ากับ $\bar{0}$ จะแสดงว่ามีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่ทำให้ $\bar{u} = a\bar{v}$

กรณีที่ 1 เมื่อ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ มีทิศทางเดียวกัน

จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากัน

นั่นคือ $\frac{1}{|\bar{u}|}\bar{u} = \frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}$

$$\bar{u} = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|}\bar{v}$$

เนื่องจาก $\frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|}$ เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $\frac{|\bar{u}|}{|\bar{v}|} = a$

ดังนั้น $\bar{u} = a\bar{v}$



กรณีที่ 2 เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางตรงกันข้าม
จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นนิเสธกัน

$$\begin{aligned}\text{นั่นคือ} \quad \frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u} &= -\frac{1}{|\vec{v}|} \vec{v} \\ \vec{u} &= -\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$ เป็นจำนวนจริงลบ และให้ $-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = a$
ดังนั้น $\vec{u} = a\vec{v}$

✓ ข้อสังเกต

$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}$ แทนเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$
 $-\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v}$ แทนเวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ และทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{v}$

(2) ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u} = a\vec{v}$ เมื่อ $a \neq 0$ จะแสดงว่า $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$

เนื่องจาก $\vec{u} = a\vec{v}$ เมื่อ $a \neq 0$

ดังนั้น $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ โดยบทนิยามการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จากกรณีที่ 1 และกรณีที่ 2

สรุปได้ว่า

สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$, $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง a ที่ไม่เท่ากับ ศูนย์ที่ทำให้ $\vec{u} = a\vec{v}$

■ ทฤษฎีบท

สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$
แล้วจะได้ $a = 0$ และ $b = 0$

พิสูจน์ ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

สมมติให้ $a \neq 0$

$$\text{จาก} \quad a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$$

$$\text{จะได้} \quad a\vec{u} = -b\vec{v}$$

$$\vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$$

$$\text{เนื่องจาก} \quad \vec{u} \neq \vec{0}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad -\frac{b}{a}\vec{v} \neq \vec{0}$$

$$\text{นั่นคือ} \quad -\frac{b}{a} \neq 0$$

$$\text{จากทฤษฎีบทเมื่อ } \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}, \frac{b}{a} \neq 0$$

$$\text{และ} \quad \vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v}$$

จะได้ $\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ ซึ่งขัดแย้งกับที่กำหนดไว้

แสดงว่าที่สมมุติว่า $a \neq 0$ ไม่ถูกต้อง

ดังนั้น $a = 0$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าสมมุติให้ $b \neq 0$

จะได้ข้อขัดแย้งเช่นเดียวกัน

ดังนั้น $b = 0$

นั่นคือ สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$

ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$ แล้วจะได้ $a = 0$ และ $b = 0$

พิจารณาความสัมพันธ์ระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$

$$1. \quad \vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$$

จะได้ว่า $\vec{u} = -2\vec{v}$

$\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้าม โดยมี $|\vec{u}| = 2|\vec{v}|$

$$2. \quad 2\vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$

จะได้ว่า $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$

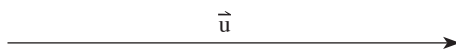
$\vec{u}$ ขนานกับ $\vec{v}$ และมีทิศทางเดียวกัน โดยที่ $|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}|$



แบบฝึกหัดที่ 3

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.1 ค ของ สสวท. หน้า 234

1. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{u}$ มีขนาด 6 เซนติเมตร ดังรูป จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้พร้อมทั้งบอกขนาดและทิศทาง



(1) $\frac{3}{2}\vec{u}$



$\frac{3}{2}\vec{u}$ มีขนาด $\frac{3}{2}(6) = 9$ เซนติเมตร มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

(2) $\frac{2}{3}\vec{u}$



$\frac{2}{3}\vec{u}$ มีขนาด $\frac{2}{3}(6) = 4$ เซนติเมตร มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

(3) $-\frac{4}{3}\vec{u}$



$-\frac{4}{3}\vec{u}$ มีขนาด $\frac{4}{3}(6) = 8$ เซนติเมตร มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

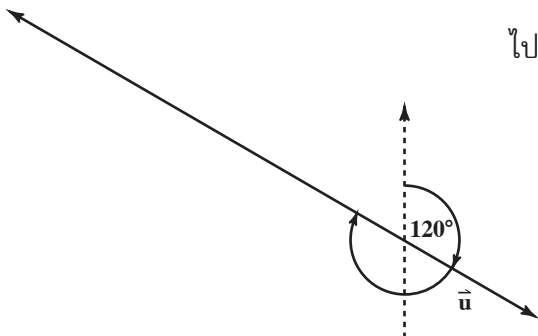


2. ถ้า $\vec{u}$ แทนการเดินทาง 20 กิโลเมตร ไปทางทิศ 120° จงบรรยายการเดินทางที่แทนด้วย $-3\vec{u}$

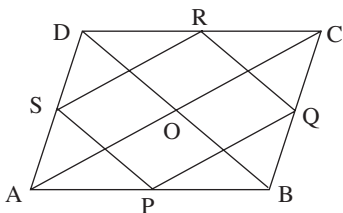
วิธีทำ

$-3\vec{u}$ แทนการเดินทาง60..... กิโลเมตร

ไปทางทิศ 300°



- 3.



กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน P, Q, R และ S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB, BC, CD และ AD ตามลำดับ ให้ $\vec{PB} = \vec{u}$ และ $\vec{BQ} = \vec{v}$

จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูป $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

(1) $\vec{AC}$

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= \vec{AB} + \vec{BC} \\ &= 2\vec{PB} + 2\vec{BQ} \\ &= 2\vec{u} + 2\vec{v}\end{aligned}$$

(2) $\vec{BD}$

$$\begin{aligned}\vec{BD} &= \vec{BC} + \vec{CD} \\ &= \vec{BC} + \vec{BA} \\ &= 2\vec{BQ} + 2\vec{BP} \\ &= 2\vec{v} + (-2\vec{PB}) \\ &= 2\vec{v} - 2\vec{u}\end{aligned}$$

4. สำหรับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และ $\vec{u}$ ไม่ขนานกับ $\vec{v}$ ถ้า $a\vec{u} + b\vec{v} = 3\vec{u} - 5\vec{v}$ จงหาค่าของ a และ b

วิธีทำ

จาก $a\vec{u} + b\vec{v} = 3\vec{u} - 5\vec{v}$

จะได้ $(a-3)\vec{u} + (b+5)\vec{v} = \vec{0}$

แต่ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ต่างไม่เท่ากับ $\vec{0}$ และไม่ขนานกัน

ดังนั้น $a-3 = 0$ และ $b+5 = 0$

จะได้ $a = 3$ และ $b = -5$

5. กำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ขนานกัน ถ้า $8\vec{u} + a(\vec{v} - \vec{u}) = 2b(\vec{v} + \vec{u})$ จัดสมการให้อยู่ในรูป $h\vec{u} = k\vec{v}$ จงหาค่าของ a และ b

วิธีทำ จาก $8\vec{u} + a(\vec{v} - \vec{u}) = 2b(\vec{v} + \vec{u})$

$$8\vec{u} + a\vec{v} - a\vec{u} = 2b\vec{v} + 2b\vec{u}$$

$$8\vec{u} - a\vec{u} - 2b\vec{u} = 2b\vec{v} - a\vec{v}$$

$$(8 - a - 2b)\vec{u} = (2b - a)\vec{v}$$

เนื่องจาก $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ไม่ขนานกัน

ดังนั้น $8 - a - 2b = 0 \dots\dots(1)$

และ $2b - a = 0 \dots\dots(2)$

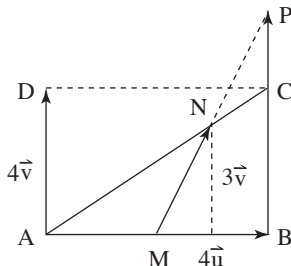
(1)+(2); $8 - 2a = 0$

$a = 4$

แทนค่า a ใน (2); $2b - 4 = 0$

$b = 2$

6. ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overrightarrow{AB}$ และ N เป็นจุดบนเส้นทแยงมุม AC ทำให้ $\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$



ต่อ $\overrightarrow{BC}$ ถึง P ทำให้ $\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ ให้ $\overrightarrow{AB} = 4\vec{u}$ และ $\overrightarrow{AD} = 4\vec{v}$

(1) จงเขียน $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ และ $\overrightarrow{NP}$ ในรูปของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

(2) จงแสดงว่า M, N และ P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

วิธีทำ (1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$= 4\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{3}{4}(4\vec{u} + 4\vec{v})$$

$$= 3\vec{u} + 3\vec{v}$$



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} \\
 &= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \\
 &= 4\vec{u} + 4\vec{v} + \frac{1}{2}(4\vec{v}) \\
 &= 4\vec{u} + 4\vec{v} + 2\vec{v} \\
 &= 4\vec{u} + 6\vec{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{NP} &= \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} \\
 &= (4\vec{u} + 6\vec{v}) - (3\vec{u} + 3\vec{v}) \\
 &= \vec{u} + 3\vec{v}
 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \\
 &= \overrightarrow{AN} - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\
 &= (3\vec{u} + 3\vec{v}) - \frac{1}{2}(4\vec{u}) \\
 &= 3\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u} \\
 &= \vec{u} + 3\vec{v}
 \end{aligned}$$

นั่นคือ

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP}$$

จะได้

$$\overline{MN} \parallel \overline{NP}$$

ดังนั้น M, N และ P อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

2. ระบบพิกัดฉากสามมิติ

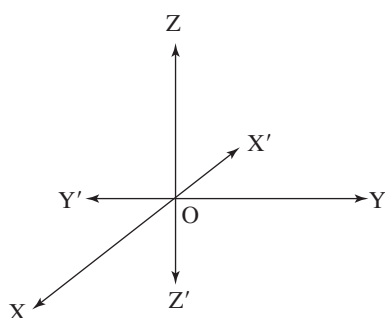
ตรงกับหัวข้อ 3.2 ของ สสวท. หน้า 235

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. นักเรียนสามารถหาพิกัดของจุดในระนาบที่กำหนดให้ได้
2. นักเรียนสามารถหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

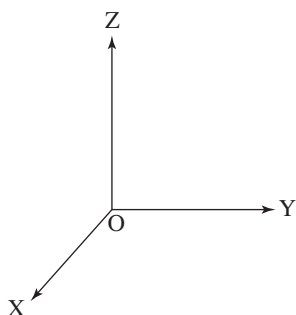


แกน X แกน Y และแกน Z ตัดกันที่จุด O
เรียกจุด O ว่า **จุดกำเนิด (origin)**

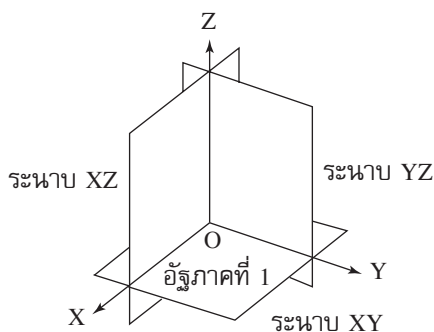
เรียก $\vec{OX}$, $\vec{OY}$ และ $\vec{OZ}$ ว่า แกน X ทางบวก
แกน Y ทางบวก และแกน Z ทางบวกตามลำดับ

เรียก $\vec{OX'}$, $\vec{OY'}$ และ $\vec{OZ'}$ ว่า แกน X
ทางลบ แกน Y ทางลบ และแกน Z ทางลบ ตามลำดับ

แกนพิกัดในสามมิตินิยมเขียนแกน X แกน Y และแกน Z ทางด้านที่แทนจำนวนจริงบวก
ซึ่งมีหัวลูกศรกำกับ ดังรูป

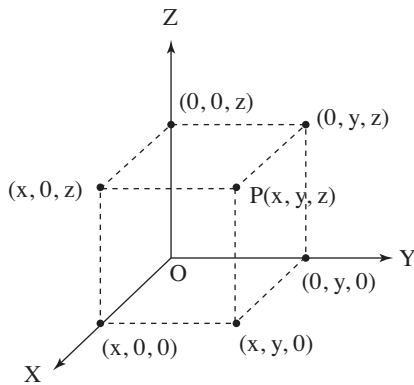


แกน X แกน Y และแกน Z จะกำหนด
ระนาบจำนวน 3 ระนาบ เรียกว่า **ระนาบอ้างอิง**
(3-dimensional coordinate system)



ระนาบ XY ระนาบ YZ และระนาบ XZ
จะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ คือ
เหนือระนาบ XY จำนวน 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY
จำนวน 4 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า **อัฐภาค (octant)**

เมื่อกำหนดจุด P เป็นจุดใดๆ ในปริภูมิ
สามมิติ จะระบุตำแหน่งของ P หรือพิกัดของ P
เรียกว่า **สามสิ่งอันดับ (ordered triple)** ในรูป (x, y, z)



จากแกนพิกัดในสามมิติ จะได้

จุดบนแกน X มีพิกัดเป็น $(x, 0, 0)$

จุดบนแกน Y มีพิกัดเป็น $(0, y, 0)$

จุดบนแกน Z มีพิกัดเป็น $(0, 0, z)$

จุดบนระนาบ XY มีพิกัดเป็น $(x, y, 0)$

จุดบนระนาบ YZ มีพิกัดเป็น $(0, y, z)$

จุดบนระนาบ XZ มีพิกัดเป็น $(x, 0, z)$

จุด $(x, y, 0)$ เป็นภาพฉาย (projection) ของจุด $P(x, y, z)$ บนระนาบ XY

จุด $(0, y, z)$ เป็นภาพฉาย (projection) ของจุด $P(x, y, z)$ บนระนาบ YZ

จุด $(x, 0, z)$ เป็นภาพฉาย (projection) ของจุด $P(x, y, z)$ บนระนาบ XZ

ระยะทางระหว่างจุดสองจุด

ทฤษฎีบท

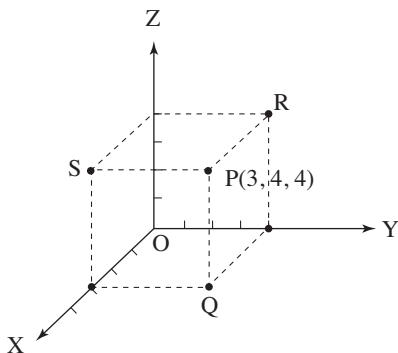
ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ เท่ากับ

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ หน่วย}$$

$$\text{หรือ } |PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \text{ หน่วย}$$

ตัวอย่าง จงหาภาพฉายของจุด $P(3, 4, 4)$ บนระนาบ XY, YZ และ XZ และระยะทางระหว่างจุดที่เป็นภาพฉายของจุด $P(3, 4, 4)$

วิธีทำ



ภาพฉายของจุด $P(3, 4, 4)$

บนระนาบ XY คือ $Q(3, 4, 0)$

บนระนาบ YZ คือ $R(0, 4, 4)$

บนระนาบ XZ คือ $S(3, 0, 4)$

จากสูตร ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ คือ

$$|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

จะได้

$$|QR| = \sqrt{(0-3)^2 + (4-4)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{9+0+16}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ หน่วย}$$

$$|RS| = \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2 + (4-4)^2}$$

$$= \sqrt{9+16+0}$$

$$= \sqrt{25} = 5 \text{ หน่วย}$$

$$|QS| = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2 + (4-0)^2}$$

$$= \sqrt{0+16+16}$$

$$= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ หน่วย}$$

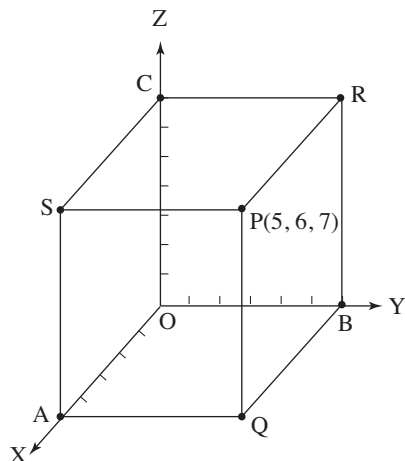
ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 4

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.2 ของ สสวท. หน้า 242

1. กำหนดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากและพิกัดของจุด P คือ (5, 6, 7) จงเติมคำตอบในช่องว่าง



จุด Q อยู่บนระนาบXY..... มีพิกัดคือ(5, 6, 0).....

จุด R อยู่บนระนาบYZ..... มีพิกัดคือ(0, 6, 7).....

จุด S อยู่บนระนาบXZ..... มีพิกัดคือ(5, 0, 7).....

จุด A อยู่บนแกนX..... มีพิกัดคือ(5, 0, 0).....

จุด B อยู่บนแกนY..... มีพิกัดคือ(0, 6, 0).....

จุด C อยู่บนแกนZ..... มีพิกัดคือ(0, 0, 7).....

ภาพฉายของจุด P(5, 6, 7) บนระนาบ XY คือQ(5, 6, 0).....

บนระนาบ YZ คือR(0, 6, 7).....

บนระนาบ XZ คือS(5, 0, 7).....

บนแกน X คือA(5, 0, 0).....

บนแกน Y คือB(0, 6, 0).....

บนแกน Z คือC(0, 0, 7).....



$$|AP| = \sqrt{(5-5)^2 + (6-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

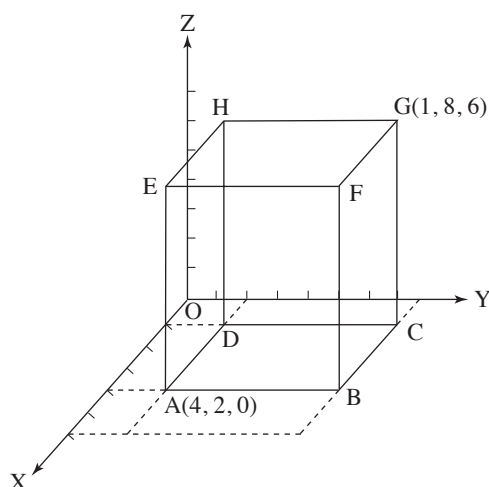
$$|OP| = \sqrt{(5-0)^2 + (6-0)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{25+36+49} = \sqrt{110}$$

$$|QS| = \sqrt{(5-5)^2 + (0-6)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

$$|QR| = \sqrt{(0-5)^2 + (6-6)^2 + (7-0)^2} = \sqrt{25+49} = \sqrt{74}$$

$$|PC| = \sqrt{(0-5)^2 + (0-6)^2 + (7-7)^2} = \sqrt{25+36} = \sqrt{61}$$

2. กำหนดทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก จงหาพิกัดของจุดมุมและความยาวของส่วนของเส้นตรงที่กำหนด



พิกัดของจุด A คือ $(4, 2, 0)$

พิกัดของจุด B คือ $(4, 8, 0)$

พิกัดของจุด C คือ $(1, 8, 0)$

พิกัดของจุด D คือ $(1, 2, 0)$

พิกัดของจุด E คือ $(4, 2, 6)$

พิกัดของจุด F คือ $(4, 8, 6)$

พิกัดของจุด G คือ $(1, 8, 6)$

พิกัดของจุด H คือ $(1, 2, 6)$

$$|AC| = \sqrt{(1-4)^2 + (8-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$|AF| = \sqrt{(4-4)^2 + (8-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{36+36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

$$|AG| = \sqrt{(1-4)^2 + (8-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{9+36+36} = \sqrt{81} = 9$$

$$|AH| = \sqrt{(1-4)^2 + (2-2)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{9+36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

3. จงหาภาพฉายของจุดบนระนาบที่กำหนดและระยะทางระหว่างจุดสองจุด

(1) ภาพฉายของจุด $P(2, -5, 6)$ บนระนาบ XY คือจุด $(2, -5, \dots)$

ภาพฉายของจุด $P(2, -5, 6)$ บนระนาบ YZ คือจุด $(\dots, -5, 6)$

ภาพฉายของจุด $P(2, -5, 6)$ บนระนาบ XZ คือจุด $(2, \dots, 6)$

ภาพฉายของจุด $Q(-2, 3, 4)$ บนระนาบ XY คือจุด $(-2, 3, 0)$

ภาพฉายของจุด $Q(-2, 3, 4)$ บนระนาบ YZ คือจุด $(0, 3, 4)$

ภาพฉายของจุด $Q(-2, 3, 4)$ บนระนาบ XZ คือจุด $(-2, 0, 4)$

- (2) ระยะทางระหว่างจุด $P(2, -5, 6)$ และ $Q(-2, 3, 4)$

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(-2-2)^2 + (3+5)^2 + (4-6)^2} \\ &= \sqrt{16+64+4} \\ &= \sqrt{84} = 2\sqrt{21} \end{aligned}$$

4. จงหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดที่กำหนด

- (1) $A(1, 5, 10)$ และ $B(2, 4, 7)$

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(2-1)^2 + (4-5)^2 + (7-10)^2} \\ &= \sqrt{1+1+9} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

- (2) $P(4, 3, -5)$ และ $Q(-1, 2, 0)$

$$\begin{aligned} |PQ| &= \sqrt{(-1-4)^2 + (2-3)^2 + (0-(-5))^2} \\ &= \sqrt{25+1+25} \\ &= \sqrt{51} \end{aligned}$$

- (3) $C(4, 3, 1)$ และ $D(-2, 5, 7)$

$$\begin{aligned} |CD| &= \sqrt{(-2-4)^2 + (5-3)^2 + (7-1)^2} \\ &= \sqrt{36+4+36} \\ &= \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \end{aligned}$$

5. จงหาพิกัดของจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงซึ่งมีจุดปลายตามที่กำหนด

- (1) $A(4, 3, 1)$ และ $B(-2, 5, 7)$

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{AB}$

พิกัดของจุด M คือ

$$\begin{aligned} &\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{1+7}{2} \right) \\ &= (1, 4, 4) \end{aligned}$$

- (2) $P(7, -1, -2)$ และ $Q(3, 4, 6)$

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของ $\overline{PQ}$

พิกัดของจุด M คือ

$$\begin{aligned} &\left(\frac{7+3}{2}, \frac{(-1)+4}{2}, \frac{(-2)+6}{2} \right) \\ &= \left(5, \frac{3}{2}, 2 \right) \end{aligned}$$

6. จงแสดงว่า $P(1, 2, 3)$, $Q(4, -5, 2)$ และ $R(0, 0, 0)$ เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$PR^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$$

$$QR^2 = 4^2 + (-5)^2 + 2^2 = 16 + 25 + 4 = 45$$

$$PQ^2 = (4-1)^2 + (-5-2)^2 + (2-3)^2 = 9 + 49 + 1 = 59$$

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2$$

ดังนั้น P, Q, R เป็นจุดมุมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



3. เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

ตรงกับหัวข้อ 3.3 ของ สสวท. หน้า 244

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติได้

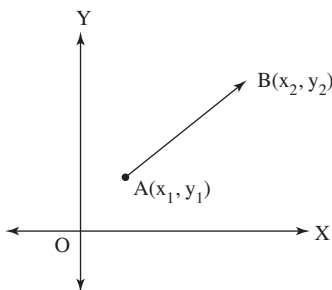
ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง

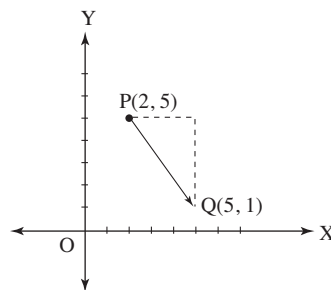
3.1 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ

ถ้า $\vec{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ จะเขียนแทน $\vec{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$

ถ้า $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ แล้วจะเขียนแทน $\vec{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$



$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$



$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 5 - 2 \\ 1 - 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

3.2 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด

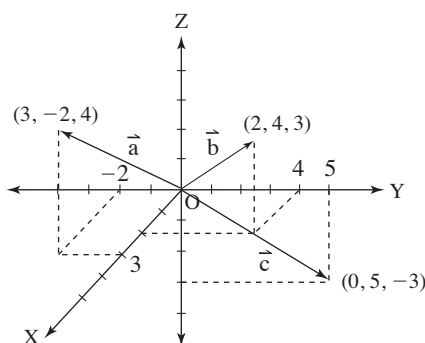
$(0, 0, 0)$ และจุดสิ้นสุดที่ (a, b, c) เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เช่น

1. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดที่ $P(2, 3, -1)$ คือ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

2. เวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดที่ $Q(0, -3, 1)$ คือ $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. เขียนเวกเตอร์ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ ลงไปในระบบพิกัดฉากได้ดังนี้



ส่วนของเส้นตรงที่ระนาบทิศทาง มีจุดเริ่มต้นที่ $P(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(x_2, y_2, z_2)$ แทนด้วย $\overrightarrow{PQ}$ ซึ่ง

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $P(3, 4, 5)$ และ $Q(-1, 0, 7)$ จงหา $\overrightarrow{PQ}$

วิธีทำ

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} -1-3 \\ 0-4 \\ 7-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ตอบ

ในระบบพิกัดฉากสองมิติและสามมิติ ให้ a, b, c, d, e และ f เป็นจำนวนจริงใดๆ สรุปรเกี่ยวกับการเท่ากันของเวกเตอร์ นิเสธของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ ได้ดังนี้

1. การเท่ากันของเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } a = c \text{ และ } b = d$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ } a = d, b = e \text{ และ } c = f$$



2. นิเสธของเวกเตอร์

$$\text{นิเสธของ } \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ คือ } -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

$$\text{นิเสธของ } \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ คือ } -\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ หรือ } \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

3. การบวกเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$$

4. เวกเตอร์ศูนย์

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. การลบเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-c \\ b-d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$$

6. การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$$

☑ ข้อสังเกต

$$1. \quad (-1) \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \end{bmatrix}$$

$$(-1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$$

$$2. \quad \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ ขนานกับ } \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \text{ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง } \lambda \neq 0 \text{ ที่ทำให้ } a = \lambda c \text{ และ } b = \lambda d$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ ขนานกับ } \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} \text{ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง } \lambda \neq 0 \text{ ที่ทำให้ } a = \lambda d, b = \lambda e \text{ และ } c = \lambda f$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $4\vec{u}$, $-3\vec{v}$ และ $4\vec{u} - 3\vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+1 \\ -3+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ -3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$4\vec{u} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (4)(2) \\ (4)(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix}$$

$$-3\vec{v} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-3)(1) \\ (-3)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4\vec{u} - 3\vec{v} &= 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 \\ -12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 18 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -30 \end{bmatrix} \text{ หรือ } 5 \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ตอบ

ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{a} - 2\vec{b}$ และ $3\vec{b} - 2\vec{a}$

วิธีทำ

$$\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$3\vec{b} - 2\vec{a} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -22 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ตอบ

สมบัติการบวกเวกเตอร์

กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระนาบ และ λ , μ เป็นจำนวนจริงใดๆ

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (สมบัติการสลับที่)
2. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
3. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
4. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
5. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่)



แบบฝึกหัดที่ 5

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.3ก ของ สสวท. หน้า 253

1. จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนด A และ B ต่อไปนี้

(1) $A(1, -3), B(4, -2)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ -2-(-3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 1-4 \\ -3-(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(2) $A(-3, -7), B(0, 0)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 0-(-3) \\ 0-(-7) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -3-0 \\ -7-0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

(3) $A(-8, -2), B(-2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-(-8) \\ -1-(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -8-(-2) \\ -2-(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(4) $A(2, 4), B(1, 5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 5-4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 4-5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(5) $A(2, 4, 7), B(1, 5, 8)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 5-4 \\ 8-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 4-5 \\ 7-8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

(6) $A(-1, 2, 0), B(4, 3, -5)$

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 4-(-1) \\ 3-2 \\ -5-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{BA} = \begin{bmatrix} -1-4 \\ 2-3 \\ 0-(-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

2. กำหนด $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $\vec{a} + \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{c} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 2+(-3) \\ 4+8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} -1 \\ 12 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

(2) $\vec{a} - \vec{c}$

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{c} &= \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 2-(-3) \\ 4-8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

(3) $3\vec{a} + 2\vec{c}$

$$\begin{aligned}3\vec{a} + 2\vec{c} &= 3\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 6 \\ 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 16 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 28 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

(4) $4\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$$\begin{aligned}4\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} &= 4\begin{bmatrix} -3 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} -12 \\ 32 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} -13 \\ 30 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

3. กำหนด $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ จงหา

$$\begin{aligned}(1) \vec{a} + \vec{b} &= \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) 2\vec{a} - 3\vec{b} &= 2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -14 \\ -4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} &= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) -\vec{a} - 2\vec{b} &= -1\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\ &= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \\ -12 \end{bmatrix} \dots\dots\dots\end{aligned}$$



4. กำหนด a, b, c และ λ เป็นจำนวนจริง

$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} \lambda a \\ \lambda b \\ \lambda c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ที่ขนานกัน

จงหาเวกเตอร์ที่ขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนด 2 เวกเตอร์

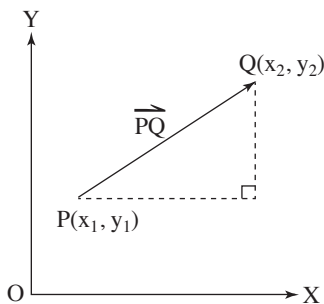
$$(1) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} -6 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -12 \\ -16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -12 \end{bmatrix}$$

3.3 ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ



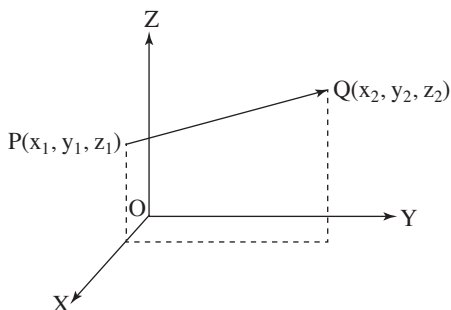
ถ้า $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$

เป็นจุดในระนาบสองมิติ

$$\text{จะได้ } \vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ แล้วจะได้ $\vec{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ และ $|\vec{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ หน่วย



ถ้า $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$

เป็นจุดในระนาบสามมิติ

$$\text{จะได้ } \vec{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{และ } |\vec{PQ}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$ และ $z_2 - z_1 = c$ จะได้

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \text{ และ } |\vec{PQ}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ หน่วย}$$

3.4 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสองมิติ และสามมิติ

บทนิยาม

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เรียกว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)**

เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2 + b^2}$

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

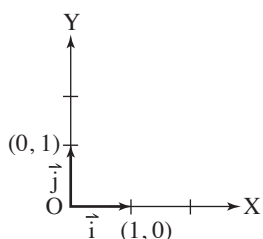
คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ มีขนาด $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

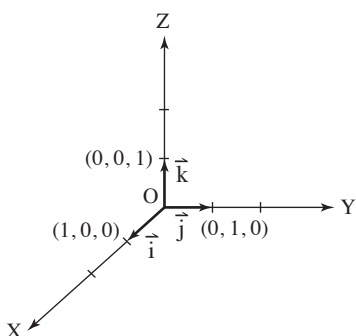
เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสองมิติ



เขียนแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$

เขียนแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{j}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ



เขียนแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\vec{i}$, $\vec{j}$ และ $\vec{k}$

ตามลำดับ

แบบฝึกหัดที่ 6

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.3 ของ สสวท. หน้า 259

1. จงหาขนาดของเวกเตอร์

(1) $\overrightarrow{AB}$ โดยที่ A มีพิกัดเป็น (2, 1) และ B มีพิกัดเป็น (-4, 8)

(2) $\overrightarrow{CD}$ โดยที่ C มีพิกัดเป็น (0, 3, -4) และ D มีพิกัดเป็น (0, -3, -2)

วิธีทำ (1) $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -4-2 \\ 8-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-6)^2 + 7^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}$$

(2) $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ -3-3 \\ -2-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2 + 2^2} = \sqrt{0+36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

หมายเหตุ

ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ เขียน $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ ในรูป $\begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ และ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

ในทำนองเดียวกัน ให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ จะได้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ และ $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

2. จงหาเวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (3, 2) และจุดสิ้นสุดที่ (-4, 1) และหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$

วิธีทำ $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4-3 \\ 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix} = -7\vec{i} - \vec{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2} = \sqrt{50}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{50}} \begin{bmatrix} -7 \\ -1 \end{bmatrix}$ หรือ

$$\frac{1}{\sqrt{50}} (-7\vec{i} - \vec{j}) = \frac{1}{5\sqrt{2}} (-7\vec{i} - \vec{j})$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10} (-7\vec{i} - \vec{j})$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{10}\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{10}\vec{j}$$

☑ หมายเหตุ

1. เวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_1, y_1) และจุดสิ้นสุดที่ (x_2, y_2) เขียนในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ คือ $\vec{u} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$
2. เวกเตอร์ $\vec{u}$ ที่มีจุดเริ่มต้นที่ (x_1, y_1, z_1) และจุดสิ้นสุดที่ (x_2, y_2, z_2) เขียนในรูปของ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ คือ $\vec{u} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$

💬 3.5 โคไซน์แสดงทิศทาง

📖 บทนิยาม

โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\vec{a}$ เมื่อ $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\vec{a}| \neq 0$ เทียบกับ

แกน X, Y, Z ตามลำดับ คือจำนวนสามจำนวน $\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}$ ตามลำดับ

ตัวอย่างที่ 4 จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ $P(-1, 2, 3)$ และจุดสิ้นสุดที่ $Q(2, 3, -5)$

วิธีทำ

$$\vec{PQ} = \begin{bmatrix} 2 - (-1) \\ 3 - 2 \\ -5 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$$

$$|\vec{PQ}| = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-8)^2} = \sqrt{74}$$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{PQ}$ คือ $\frac{3}{\sqrt{74}}, \frac{1}{\sqrt{74}}, \frac{-8}{\sqrt{74}}$

ตอบ

📖 บทนิยาม

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกัน ก็ต่อเมื่อ มีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงข้ามกัน ก็ต่อเมื่อ โคไซน์แสดงทิศทางเทียบกับแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง



ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

วิธีทำ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2} = \sqrt{14}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$

$\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 6 \end{bmatrix}$, $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + (-9)^2 + 6^2} = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{v}$ คือ $\frac{3}{3\sqrt{14}}, \frac{-9}{3\sqrt{14}}, \frac{6}{3\sqrt{14}}$ หรือ $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}$

$\vec{w} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$, $|\vec{w}| = \sqrt{(-2)^2 + 6^2 + (-4)^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{w}$ คือ $\frac{-2}{2\sqrt{14}}, \frac{6}{2\sqrt{14}}, \frac{-4}{2\sqrt{14}}$ หรือ $\frac{-1}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}$

จะเห็นว่า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ ขนานกัน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีทิศทางเดียวกัน แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{w}$ **ตอบ**



แบบฝึกหัดที่ 7

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.3 ของ สสวท. หน้า 259

- จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$ ในระบบพิกัดฉากสองมิติ และเขียนในรูป $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เมื่อกำหนดจุด A เป็นจุดเริ่มต้น และจุด B เป็นจุดสิ้นสุด พร้อมทั้งหาขนาดของเวกเตอร์และเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$

ข้อ	จุดเริ่มต้น (A)	จุดสิ้นสุด (B)	$\vec{AB}$	$ \vec{AB} $	เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{AB}$
(1)	(2, 3)	(1, -4)	$(1-2)\vec{i} + (-4-3)\vec{j}$ $= -\vec{i} - 7\vec{j}$	$\sqrt{(-1)^2 + (-7)^2}$ $= \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$	$\frac{1}{5\sqrt{2}}(-\vec{i} - 7\vec{j})$ $= -\frac{1}{5\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{7}{5\sqrt{2}}\vec{j}$
(2)	(-2, 1)	(4, -3)	$(4-(-2))\vec{i} + (-3-1)\vec{j}$ $= 6\vec{i} - 4\vec{j}$	$\sqrt{6^2 + (-4)^2}$ $= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$	$\frac{1}{2\sqrt{13}}(6\vec{i} - 4\vec{j})$ $= \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$

ข้อ	จุดเริ่มต้น (A)	จุดสิ้นสุด (B)	$\vec{AB}$	$ \vec{AB} $	เวกเตอร์หนึ่งหน่วย ที่มีทิศทาง เดียวกับ $\vec{AB}$
(3)	$(-3, -1)$	$(1, 2)$	$(1-(-3))\vec{i}+(2-(-1))\vec{j}$ $= 4\vec{i}+3\vec{j}$	$\sqrt{4^2+3^2}$ $=\sqrt{25} = 5$	$\frac{1}{5}(4\vec{i}+3\vec{j})$ $= \frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$
(4)	$(3, -4)$	$(-1, -4)$	$(-1-3)\vec{i}+(-4-(-4))\vec{j}$ $= -4\vec{i}+0\vec{j}$	$\sqrt{(-4)^2+0^2}$ $= 4$	$-\frac{4}{4}\vec{i}+\frac{0}{4}\vec{j}$ $= -\vec{i}$
(5)	$(1, 1, 3)$	$(3, -1, 2)$	$(3-1)\vec{i}+(-1-1)\vec{j}+(2-3)\vec{k}$ $= 2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$	$\sqrt{2^2+(-2)^2+(-1)^2}$ $= 3$	$\frac{1}{3}(2\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k})$ $= \frac{2}{3}\vec{i}-\frac{2}{3}\vec{j}-\frac{1}{3}\vec{k}$
(6)	$(4, 3, 1)$	$(-2, 5, 7)$	$(-2-4)\vec{i}+(5-3)\vec{j}+(7-1)\vec{k}$ $= -6\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k}$	$\sqrt{(-6)^2+2^2+6^2}$ $= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$	$\frac{1}{2\sqrt{19}}(-6\vec{i}+2\vec{j}+6\vec{k})$ $= -\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{i}+\frac{1}{\sqrt{19}}\vec{j}+\frac{3}{\sqrt{19}}\vec{k}$
(7)	$(0, 0, 0)$	$(2, -1, 4)$	$(2-0)\vec{i}+(-1-0)\vec{j}+(4-0)\vec{k}$ $= 2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k}$	$\sqrt{2^2+(-1)^2+4^2}$ $= \sqrt{21}$	$\frac{2}{\sqrt{21}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{21}}\vec{j}+\frac{4}{\sqrt{21}}\vec{k}$ $= \frac{1}{\sqrt{21}}(2\vec{i}-\vec{j}+4\vec{k})$

2. จงแก้สมการ

$$(1) \quad x \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x \\ 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3x+y \\ 4x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$3x+y = 6 \quad \dots(1)$$

$$4x+2y = 10 \quad \dots(2)$$

$$\text{จาก (2); } 2x+y = 5 \quad \dots(3)$$

$$(1)-(3); \quad x = 1$$

$$\text{แทนค่า } x \text{ ใน (1); } y = 3$$

$$(2) \quad x \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$3x-2y = 8 \quad \dots(1)$$

$$x+y-3z = -11 \quad \dots(2)$$

$$2x-y+z = 9 \quad \dots(3)$$

$$(3) \times 3; \quad 6x-3y+3z = 27 \quad \dots(4)$$

$$(2)+(4); \quad 7x-2y = 16 \quad \dots(5)$$

$$(5)-(1); \quad 4x = 8$$

$$x = 2$$

$$\text{แทนค่า } x \text{ ใน (1); } y = -1$$

$$\text{แทนค่า } x, y \text{ ใน (3); } z = 4$$



3. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและเวกเตอร์ 4 หน่วย ที่ขนานกับ $\vec{AB}$ ซึ่งมีพิกัดดังนี้

(1) $A(5, -2)$ และ $B(-7, 3)$

วิธีทำ $\vec{AB} = \begin{bmatrix} -7-5 \\ 3-(-2) \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= -12\vec{i} + 5\vec{j}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-12)^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{169} = 13$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\vec{AB}$ คือ $\pm \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 4 หน่วยที่ขนานกับ $\vec{AB}$ คือ

$$\pm \frac{4}{13} \begin{bmatrix} -12 \\ 5 \end{bmatrix} = \pm \frac{4}{13} (-12\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$= -\frac{48}{13}\vec{i} + \frac{20}{13}\vec{j} \text{ และ } \frac{48}{13}\vec{i} - \frac{20}{13}\vec{j}$$

(2) $A(2, 4, 6)$ และ $B(0, 7, -3)$

วิธีทำ $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 0-2 \\ 7-4 \\ -3-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \sqrt{94}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่ขนานกับ $\vec{AB}$ คือ $\pm \frac{1}{\sqrt{94}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix}$

เวกเตอร์ 4 หน่วยที่ขนานกับ $\vec{AB}$ คือ

$$\pm \frac{4}{\sqrt{94}} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -9 \end{bmatrix} = \pm \frac{4}{\sqrt{94}} (-2\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k})$$

$$= -\frac{8}{\sqrt{94}}\vec{i} + \frac{12}{\sqrt{94}}\vec{j} - \frac{36}{\sqrt{94}}\vec{k} \text{ และ } \frac{8}{\sqrt{94}}\vec{i} - \frac{12}{\sqrt{94}}\vec{j} + \frac{36}{\sqrt{94}}\vec{k}$$

สรุป เวกเตอร์ m หน่วยที่ขนานกับ $\vec{u}$ คือ $\pm \frac{m}{|\vec{u}|} \vec{u}$ เมื่อ $m \in \mathbb{R}$ เวกเตอร์ที่ขนานกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $|\vec{u}|$ คือ $\pm \frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|} \vec{u}$

4. กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$

วิธีทำ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix}, |\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix}, |\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = 17$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|} \vec{u}$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{v}$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} &= \frac{17}{10} \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ &= \frac{17}{10} (6\vec{i} + 8\vec{j}) \\ &= \frac{51}{5} \vec{i} + \frac{68}{5} \vec{j} \end{aligned}$$

(2) เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$

วิธีทำ เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u}$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} &= \frac{10}{17} \begin{bmatrix} 8 \\ 15 \end{bmatrix} \\ &= \frac{10}{17} (8\vec{i} + 15\vec{j}) \\ &= \frac{80}{17} \vec{i} + \frac{150}{17} \vec{j} \end{aligned}$$

5. จงหาเวกเตอร์พร้อมทั้งบอกขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้น (A) และจุดสิ้นสุด (B) ในแต่ละข้อ

(1) A(3, 5, 2) และ B(-1, 3, 5)

วิธีทำ $\vec{AB} = \begin{bmatrix} -1-3 \\ 3-5 \\ 5-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{16+4+9} \\ &= \sqrt{29} \end{aligned}$$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{AB}$

คือ $\frac{-4}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}$

(2) A(0, 1, -3) และ B(8, 4, 2)

วิธีทำ $\vec{AB} = \begin{bmatrix} 8-0 \\ 4-1 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} |\vec{AB}| &= \sqrt{8^2 + 3^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{64+9+25} \\ &= \sqrt{98} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{AB}$

คือ $\frac{8}{7\sqrt{2}}, \frac{3}{7\sqrt{2}}, \frac{5}{7\sqrt{2}}$



6. กำหนด $2\vec{i} - 5\vec{j} = a(5\vec{i} + 7\vec{j}) + b(4\vec{i} + 3\vec{j})$ และ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} 2\vec{i} - 5\vec{j} &= a(5\vec{i} + 7\vec{j}) + b(4\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= 5a\vec{i} + 7a\vec{j} + 4b\vec{i} + 3b\vec{j} \\ &= (5a + 4b)\vec{i} + (7a + 3b)\vec{j} \end{aligned}$$

จากสมบัติการเท่ากันของเวกเตอร์ จะได้

$$5a + 4b = 2 \quad \dots(1)$$

$$7a + 3b = -5 \quad \dots(2)$$

จาก (1) และ (2) แก้ระบบสมการจะได้ $a = -2$ และ $b = 3$

กล่าวคือ $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ } \vec{u} \text{ คือ } &= \frac{1}{\sqrt{13}}(-2\vec{i} + 3\vec{j}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{j} \end{aligned}$$

7. กำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{v} = 12\vec{i} - 5\vec{j}$ จงหาเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u} + \vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u} - \vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u} + \vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) + (12\vec{i} - 5\vec{j}) = 15\vec{i} - \vec{j}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-1)^2} = \sqrt{225 + 1} = \sqrt{226}$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - (12\vec{i} - 5\vec{j}) = -9\vec{i} + 9\vec{j}$$

$$|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{(-9)^2 + 9^2} = \sqrt{81 + 81} = 9\sqrt{2}$$

เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u} + \vec{v}$ และมีขนาดเท่ากับ $\vec{u} - \vec{v}$ คือ

$$\begin{aligned} \frac{|\vec{u} - \vec{v}|}{|\vec{u} + \vec{v}|}(\vec{u} + \vec{v}) &= \frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{226}}(15\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \frac{9}{\sqrt{113}}(15\vec{i} - \vec{j}) \\ &= \frac{135}{\sqrt{113}}\vec{i} - \frac{9}{\sqrt{113}}\vec{j} \end{aligned}$$

4. ผลคูณเชิงสเกลาร์

ตรงกับหัวข้อ 3.4 ของ สสวท. หน้า 260

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การแก้ปัญหา

บทนิยาม

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติหรือสามมิติ a_1, a_2, a_3, b_1, b_2 และ b_3 เป็นสเกลาร์ ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เขียนแทนด้วย $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เป็นดังนี้

1. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสองมิติ จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2$
2. ถ้า $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\vec{u} = 4\vec{i} + 5\vec{j}$ และ $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$ และ $\vec{v} \cdot \vec{u}$

วิธีทำ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j})$$

$$= (4)(2) + (5)(-1)$$

$$= 8 - 5$$

$$= 3$$

$$\vec{v} \cdot \vec{u} = (2\vec{i} - \vec{j}) \cdot (4\vec{i} + 5\vec{j})$$

$$= (2)(4) + (-1)(5)$$

$$= 8 - 5$$

$$= 3$$

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ดอท เวกเตอร์วี



ตอบ

หมายเหตุ

นอกจากผลคูณเชิงสเกลาร์แล้ว ยังมีผลคูณอีกแบบหนึ่งคือ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่งหมายถึงผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์



ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

วิธีทำ

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (3)(1) + (-1)(2) + (4)(3) = 13$$

ตอบ

ทฤษฎีบท

1. ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติหรือสามมิติ และ a เป็นสเกลาร์ จะได้ว่า

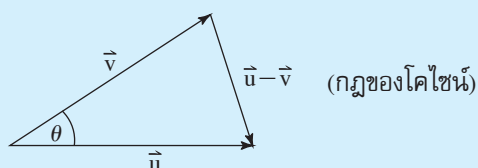
- (1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (การสลับที่)
- (2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (การแจกแจง)
- (3) $a(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a\vec{v})$
- (4) $\vec{0} \cdot \vec{u} = 0$
- (5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- (6) $\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$
 $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$

2. ถ้า θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ซึ่ง $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ แล้ว $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ (มุมระหว่างเวกเตอร์มีเส้นของมุมเป็นรังสีและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ทั้งสอง)

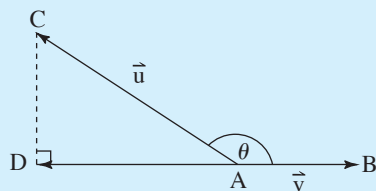
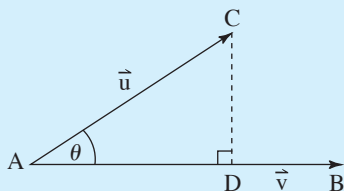
3. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

4. เมื่อ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสองมิติ

- (1) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- (2) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$
- (3) $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$
- (4) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 + |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 2(|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2)$
- (5) $|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2 = 4\vec{u} \cdot \vec{v}$
- (6) $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$



- (7) เวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ คือ $\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$ และขนาดของเวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$ เท่ากับ $\frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|}$



$\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AD}$ คือเวกเตอร์ภาพฉายของ $\vec{u}$ บน $\vec{v}$

- (8) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มี $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้านประชิดกันเท่ากับ $\frac{1}{2} \sqrt{|\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2}$



แบบฝึกหัดที่ 8

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.4 ของ สสวท. หน้า 270

1. จงหาขนาดของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เมื่อกำหนด $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ดังต่อไปนี้

(1) $\vec{u} = \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-5)(9) + (7)(2) \\ &= -45 + 14 \\ &= -31 \end{aligned}$$

(2) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1)(0) + (0)(1) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(3) $\vec{u} = -4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}, \vec{v} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$

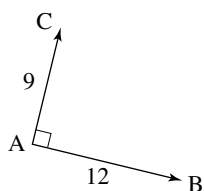
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (-4)(6) + (2)(-3) + (4)(0) \\ &= -24 - 6 + 0 \\ &= -30 \end{aligned}$$

(4) $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (1)(1) + (-2)(2) + (-1)(4) \\ &= 1 - 4 - 4 \\ &= -7 \end{aligned}$$

2. จงหา $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ จากรูปที่กำหนดต่อไปนี้ (ใช้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$)

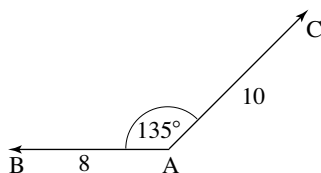
(1)



$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= (12)(9) \cos 90^\circ \\ &= (12)(9)(0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

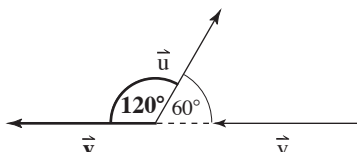


(2)



$$\begin{aligned}\vec{AB} \cdot \vec{AC} &= (8)(10)\cos 135^\circ \\ &= (8)(10)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= -40\sqrt{2}\end{aligned}$$

3. จากรูป กำหนด $|\vec{u}| = 6$ และ $|\vec{v}| = 7$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$



วิธีทำ สร้างมุมที่มีเวกเตอร์ทั้งสองเป็นแขนของมุม ขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์เท่ากับ 120°

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \\ &= (6)(7)\cos 120^\circ \\ &= (6)(7)\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -21\end{aligned}$$

4. กำหนด $A(6, 2)$ และ $B(3, 7)$ จงหา $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ เมื่อ O เป็นจุดกำเนิด

วิธีทำ $\vec{OA} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}\vec{OA} \cdot \vec{OB} &= (6)(3) + (2)(7) \\ &= 18 + 14 \\ &= 32\end{aligned}$$

5. จงหาขนาดของมุมระหว่างเวกเตอร์

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \\ \cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}\end{aligned}$$

(1) $\vec{u} = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\sqrt{3})(2) + (1)(2\sqrt{3}) = 4\sqrt{3}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{4\sqrt{3}}{(2)(4)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\theta = 30^\circ$$

(2) $\vec{u} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}, \vec{v} = 2\vec{i} - 2\sqrt{3}\vec{j}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (\sqrt{3})(-2\sqrt{3}) = -4$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{(2)(4)} = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = 120^\circ$$

$$(3) \vec{u} = \vec{i}, \vec{v} = 2\vec{i} + 2\sqrt{3}\vec{j}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(2) + (0)(2\sqrt{3}) = 2$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$\cos \theta = \frac{2}{(1)(4)} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$(4) \vec{u} = \vec{i} + \vec{j}, \vec{v} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{2}\vec{j}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1)(\sqrt{2}) + (1)(-\sqrt{2}) = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = 2$$

$$\cos \theta = \frac{0}{(\sqrt{2})(2)} = 0$$

$$\theta = 90^\circ$$

6. กำหนดให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ จงหา

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= [(3)(1) + (-2)(4)] + [(3)(2) + (-2)(-1)]$$

$$= (3-8) + (6+2)$$

$$= 3$$

$$(2) \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(3) + (-2)(3)$$

$$= 9-6$$

$$= 3$$

$$(3) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= (4)(4) + (2)(2)$$

$$= 16+4$$

$$= 20$$

$$(4) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$= (4)(2) + (2)(-6)$$

$$= 8-12$$

$$= -4$$



7. กำหนดให้ $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหา

(1) $(\vec{a} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{c})$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \dots\dots\dots \\
 &= [(3)(1) + (-2)(4) + (1)(0)] \dots\dots\dots \\
 &\quad + [(3)(2) + (-2)(-1) + (1)(5)] \dots\dots\dots \\
 &= (-5) + 13 \dots\dots\dots \\
 &= 8 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

(2) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right) \dots\dots\dots \\
 &= \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \\
 &= (3)(3) + (-2)(3) + (1)(5) \dots\dots\dots \\
 &= 9 - 6 + 5 \dots\dots\dots \\
 &= 8 \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

8. กำหนดพิกัดของจุดในระบบแกนมุมฉากสองมิติคือ $A\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$, $B(-1, 1)$, $C(3, -1)$ และ $D(x, y)$

(1) ถ้า $\frac{1}{5}\vec{a} = \vec{AB}$ จงเขียน $\vec{a}$ ในรูปของ $\vec{i}$ และ $\vec{j}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \left(-1 - \frac{2}{3}\right)\vec{i} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)\vec{j} \dots\dots\dots \\
 &= -\frac{5}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j} \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\frac{1}{5}\vec{a} = \vec{AB}$ จะได้ $\vec{a} = 5\vec{AB}$

$$\begin{aligned}
 \text{แทน } \vec{AB} \text{ จะได้ } \vec{a} &= 5\left(-\frac{5}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \dots\dots\dots \\
 &= -\frac{25}{3}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

(2) ถ้า $\vec{CD} = 3\vec{AB}$ จงหาพิกัดของจุด D

วิธีทำ

$$\vec{CD} = (x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} \dots\dots\dots$$

จาก

$$\vec{CD} = 3\vec{AB}$$

$$(x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} = 3\left(-\frac{5}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}\right) \dots\dots\dots$$

$$(x-3)\vec{i} + (y+1)\vec{j} = -5\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \dots\dots\dots$$

จะได้ $x-3 = -5$ และ $y+1 = \frac{3}{2}$ $\dots\dots\dots$

$$x = -2 \qquad y = \frac{1}{2} \dots\dots\dots$$

ดังนั้น พิกัดของจุด D คือ $\left(-2, \frac{1}{2}\right) \dots\dots\dots$

9. จงแสดงว่าเวกเตอร์ที่กำหนดให้เวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกันและคู่ใดไม่ตั้งฉากกัน

(1) $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}, \vec{v} = 10\vec{i} - 5\vec{j}$

(2) $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{b} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(10) + (4)(-5) \dots\dots\dots$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3)(5) + (-4)(4) + (5)(-3) \dots\dots\dots$$

$$= 20 - 20 \dots\dots\dots$$

$$= 15 - 16 - 15 \dots\dots\dots$$

$$= 0 \dots\dots\dots$$

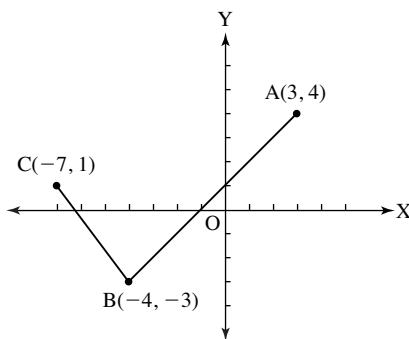
$$= -16 \dots\dots\dots$$

ดังนั้น $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

ดังนั้น $\vec{a}$ ไม่ตั้งฉากกับ $\vec{b}$

10. กำหนดให้ $A(3, 4), B(-4, -3)$ และ $C(-7, 1)$ จงหาขนาดของมุม ABC

วิธีทำ



$$\vec{BA} = (3+4)\vec{i} + (4+3)\vec{j} \dots\dots\dots$$

$$= 7\vec{i} + 7\vec{j} \dots\dots\dots$$

$$|\vec{BA}| = \sqrt{7^2 + 7^2} \dots\dots\dots$$

$$= \sqrt{98} \dots\dots\dots$$

$$= 7\sqrt{2} \dots\dots\dots$$

$$\vec{BC} = (-7+4)\vec{i} + (1+3)\vec{j} \dots\dots\dots$$

$$= -3\vec{i} + 4\vec{j} \dots\dots\dots$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \dots\dots\dots$$

$$= 5 \dots\dots\dots$$

$$\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (7\vec{i} + 7\vec{j}) \cdot (-3\vec{i} + 4\vec{j}) \dots\dots\dots$$

$$= (7)(-3) + (7)(4) \dots\dots\dots$$

$$= -21 + 28 \dots\dots\dots$$

$$= 7 \dots\dots\dots$$



เนื่องจาก $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| |\vec{BC}| \cos \hat{ABC}$

$$\cos \hat{ABC} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| |\vec{BC}|}$$

$$= \frac{7}{(7\sqrt{2})(5)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{10}$$

ดังนั้น มุม ABC มีขนาด $\cos^{-1} \frac{\sqrt{2}}{10}$ องศา

☑ ข้อสังเกต

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta$$

$$\text{จะได้ } \cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \text{ และ } -1 \leq \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \leq 1$$

11. กำหนดให้ $\vec{u} = k\vec{i} + 3\vec{j}$ และ $\vec{v} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกันแล้ว จงหาค่าของ k

วิธีทำ ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตั้งฉากกันแล้ว

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{ดังนั้น } (k\vec{i} + 3\vec{j}) \cdot (5\vec{i} - 2\vec{j}) = 0$$

$$(k)(5) + (3)(-2) = 0$$

$$5k - 6 = 0$$

$$k = \frac{6}{5}$$

12. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย และ $|3\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{7}$ จงหาขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ จาก $|3\vec{u} - 2\vec{v}| = \sqrt{7}$

$$|3\vec{u} - 2\vec{v}|^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$9|\vec{u}|^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4|\vec{v}|^2 = 7 \quad \dots(1)$$

เนื่องจาก $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

$$\text{ดังนั้น } |\vec{u}| = 1 \text{ และ } |\vec{v}| = 1$$

$$\text{แทนค่าใน (1); } 9(1)^2 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4(1)^2 = 7$$

$$9 - 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 4 = 7$$

$$12\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}$$

ให้ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

จะได้

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|} \\ &= \frac{1}{(1)(1)} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\cos \theta = \cos 60^\circ$$

ดังนั้น

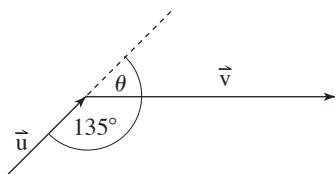
$$\theta = 60^\circ$$

นั่นคือ ขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ 60° องศา

13. จากรูป กำหนด $|\vec{u}| = 5, |\vec{v}| = 12$ จงหา $\vec{u} \cdot \vec{v}$

วิธีทำ

จากรูป $\theta = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$



$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \\ &= (5)(12) \cos 45^\circ \\ &= 60 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= 30\sqrt{2}\end{aligned}$$

14. ถ้า $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 5$ และ $|\vec{u} + \vec{v}| = 4$ แล้ว $|\vec{u} - \vec{v}|$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$|\vec{u} + \vec{v}| = 4$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 4^2$$

$$|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 16$$

$$3^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 5^2 = 16$$

$$9 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 25 = 16$$

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = 16 - 9 - 25$$

$$2\vec{u} \cdot \vec{v} = -18$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$= 3^2 - (-18) + 5^2$$

$$= 9 + 18 + 25$$

$$= 52$$

ดังนั้น $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$



15. กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ โดยที่ $|\vec{v}| = |\vec{w}|$ และ $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u} - \vec{v}|$ ถ้ามุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{w}$ มีขนาด $\frac{\pi}{6}$ แล้วมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาดเท่าไร

วิธีทำ จาก $|\vec{u} + \vec{w}| = |\vec{u} - \vec{v}|$

$$|\vec{u} + \vec{w}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2$$

$$|\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{w} + |\vec{w}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$$

$$2\vec{u} \cdot \vec{w} = -2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad (\text{เนื่องจาก } |\vec{v}| = |\vec{w}|)$$

$$|\vec{u}||\vec{w}| \cos \frac{\pi}{6} = -|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \quad (\text{จาก } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta)$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = -\cos \theta$$

$$-\cos \frac{\pi}{6} = \cos \theta$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

ดังนั้น มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ มีขนาด $\frac{5\pi}{6}$

16. กำหนดเวกเตอร์ $\vec{a}$, $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ดังนี้

$\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{a} + \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$ โดยที่ $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ และ $|\vec{c}| = 2\sqrt{17}$ ถ้า $\vec{c}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a} - \vec{b}$ แล้ว $c_1 + c_2$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ กำหนดให้ $\vec{a} + \vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j}$

และ $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$

จะได้ $\vec{b} = 2\vec{i} + 6\vec{j}$

จากกำหนดให้ $\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{i} - 8\vec{j}$

จากกำหนดให้ $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j}$

และ $|\vec{c}| = 2\sqrt{17}$

ดังนั้น $\sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 2\sqrt{17}$

$$c_1^2 + c_2^2 = 68 \quad \dots(1)$$

เนื่องจาก $\vec{c}$ ตั้งฉากกับ $\vec{a}-\vec{b}$

$$\text{ดังนั้น} \quad \vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$$

$$(c_1\vec{i} + c_2\vec{j}) \cdot (2\vec{i} - 8\vec{j}) = 0$$

$$2c_1 - 8c_2 = 0$$

$$2c_1 = 8c_2$$

$$c_1 = 4c_2$$

$$\text{จาก (1)} \quad (4c_2)^2 + c_2^2 = 68$$

$$17c_2^2 = 68$$

$$c_2^2 = 4$$

$$c_2 = 2 \quad (c_2 > 0)$$

$$c_1 = 4(2) = 8$$

$$c_1 + c_2 = 8 + 2$$

$$= 10$$

17. ให้ $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{A}| = 3$, $|\vec{B}| = 2$ และ $|\vec{C}| = 1$ ถ้า $\vec{A} + \vec{B} + 4\vec{C} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A}$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จาก

$$\vec{A} + \vec{B} + 4\vec{C} = \vec{0}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = -4\vec{C}$$

$$|\vec{A} + \vec{B}|^2 = |-4\vec{C}|^2$$

$$|\vec{A}|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + |\vec{B}|^2 = 16|\vec{C}|^2 \quad \dots(1)$$

จากกำหนดให้ $|\vec{A}| = 3$, $|\vec{B}| = 2$ และ $|\vec{C}| = 1$

$$\text{แทนค่าใน (1) จะได้} \quad 3^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B} + 2^2 = 16(1)^2$$

$$2\vec{A} \cdot \vec{B} + 13 = 16$$

$$2\vec{A} \cdot \vec{B} = 3$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \frac{3}{2}$$



เนื่องจาก $\vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot (\vec{B} + \vec{A})$

แทนค่า $\vec{B} + \vec{A} = -4\vec{C}$ จะได้ $\vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A} = \vec{C} \cdot (-4\vec{C})$

$$= (-4)\vec{C} \cdot \vec{C}$$

$$= (-4)|\vec{C}|^2$$

$$= (-4)(1)^2$$

$$= -4$$

ดังนั้น $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A} = \frac{3}{2} + (-4)$

$$= -\frac{5}{2}$$

18. ให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$ ถ้า $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และขนาดของ $\vec{v}$ เท่ากับ $2\sqrt{29}$ หน่วย แล้ว $|x+y|$ มีค่าเท่าไร

วิธีทำ จากกำหนด $\vec{u} = 2\vec{i} - 5\vec{j}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ คือ $\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

$$\frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{29}}(2\vec{i} - 5\vec{j})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}$$

จากกำหนด $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ และมีขนาด $2\sqrt{29}$ หน่วย

ดังนั้น $x\vec{i} + y\vec{j} = 2\sqrt{29}\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\vec{i} - \frac{5}{\sqrt{29}}\vec{j}\right)$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = 4\vec{i} - 10\vec{j}$$

ดังนั้น $x = 4$ และ $y = -10$

$$|x+y| = |4+(-10)|$$

$$= 6$$

5. ผลคูณเชิงเวกเตอร์

ตรงกับหัวข้อ 3.5 ของ สสวท. หน้า 272

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์และนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

1. การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์
2. การเชื่อมโยง
3. การแก้ปัญหา

บทนิยาม

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\vec{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$

เขียนแทนด้วย $\vec{u} \times \vec{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี

ในทางปฏิบัตินิยมใช้

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ตัวอย่างที่ 1 กำหนด $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{v} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= [(2)(0) - (4)(-3)]\vec{i} - [(-4)(0) - (4)(6)]\vec{j} + [(-4)(-3) - (2)(6)]\vec{k} \\
 &= (0+12)\vec{i} - (0-24)\vec{j} + (12-12)\vec{k} \\
 &= 12\vec{i} + 24\vec{j} + 0\vec{k} \\
 &= 12\vec{i} + 24\vec{j}
 \end{aligned}$$

ตอบ

☑ ข้อสังเกต

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \quad (\text{กระจายตามแถวที่ 1})$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

📖 ทฤษฎีบท

ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ $\vec{u} \times \vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ที่มีขนาดเป็น $|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin \theta$ เมื่อ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยที่ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$

📖 ทฤษฎีบท

ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $\vec{u} \times \vec{v}$ และ $\vec{v} \times \vec{u}$ เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับระนาบที่ผ่าน $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ และมีทิศทางตรงกันข้าม คือ $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

สมบัติที่สำคัญของผลคูณเชิงเวกเตอร์

1. กำหนด $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติ และ k เป็นจำนวนจริงใดๆ

$$(1) \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$$

$$(2) (\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = (\vec{u} \times \vec{w}) + (\vec{v} \times \vec{w})$$

$$(3) \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{w})$$

$$(4) \vec{u} \times (k\vec{v}) = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

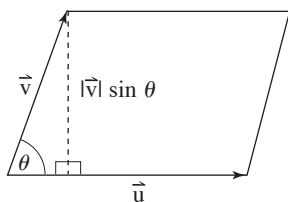
$$(5) (k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$$

$$(6) \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$$

$$(7) \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

2. ให้ $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ จะได้ว่า $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}$

การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



$\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่ไม่ขนานกัน โดยมีมุมระหว่างกัน θ
จะได้ว่ารูปสี่เหลี่ยมด้านขนานสูง $|\vec{v}| \sin \theta$

พื้นที่รูปสี่เหลี่ยมด้านขนานคือ

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\vec{AB} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

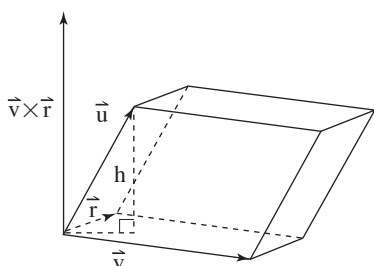
วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{AB} \times \vec{AD}|$

$$\begin{aligned} \vec{AB} \times \vec{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= [(-1)(-2) - (1)(1)]\vec{i} - [(2)(-2) - (1)(-1)]\vec{j} + [(2)(1) - (-1)(-1)]\vec{k} \\ &= \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} \\ |\vec{AB} \times \vec{AD}| &= \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{1+9+1} \\ &= \sqrt{11} \end{aligned}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $\sqrt{11}$ ตารางหน่วย

ตอบ

การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน



กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{r}$ เป็นด้านของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากจากจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ มายังระนาบที่กำหนดด้วย $\vec{v}$ และ $\vec{r}$



θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v} \times \vec{r}$

ดังนั้น $h = |\vec{u}| \cos \theta$

$|\vec{v} \times \vec{r}|$ คือพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เป็นฐาน

ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ

$$\begin{aligned} \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{ความสูง} &= |\vec{v} \times \vec{r}| |\vec{u}| \cos \theta \\ &= |\vec{u}| |\vec{v} \times \vec{r}| \cos \theta \\ &= |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})| \end{aligned}$$

✓ ข้อสังเกต

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{u})$
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) = -\vec{u} \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = -\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{r}) = -\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{u})$
- ถ้า $\vec{u}, \vec{v}$ และ $\vec{r}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน จะได้ $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r}) = 0$
- เวกเตอร์ 3 เวกเตอร์ใดๆ ถ้ามีสองเวกเตอร์ในสามเวกเตอร์นี้เท่ากันแล้ว
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot (\vec{r} \times \vec{r}) = \vec{r} \cdot (\vec{u} \times \vec{u}) = 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นด้าน

$$\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}, \vec{r} = \vec{j} - 2\vec{k}$$

วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ $|\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})|$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= 6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k} \\ |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})| &= |(\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}) \cdot (6\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k})| \\ &= |(1)(6) + (2)(4) + (3)(2)| \\ &= |6 + 8 + 6| \\ &= |20| \\ &= 20 \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ 20 ลูกบาศก์หน่วย

ตอบ



แบบฝึกหัดที่ 9

ตรงกับแบบฝึกหัด 3.5 ของ สสวท. หน้า 285

1. จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ และ $\vec{v} \times \vec{u}$ จากเวกเตอร์ที่กำหนดให้

$$(1) \quad \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-2+9)\vec{i} - (-1-6)\vec{j} + (-3-4)\vec{k} \\ &= 7\vec{i} + 7\vec{j} - 7\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-9+2)\vec{i} - (6+1)\vec{j} + (4+3)\vec{k} \\ &= -7\vec{i} - 7\vec{j} + 7\vec{k} \end{aligned}$$

$$(2) \quad \vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}, \vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-6-20)\vec{i} - (9-10)\vec{j} + (12+4)\vec{k} \\ &= -26\vec{i} + \vec{j} + 16\vec{k} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \vec{v} \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
 &= (20+6)\vec{i} - (10-9)\vec{j} + (-4-12)\vec{k} \\
 &= 26\vec{i} - \vec{j} - 16\vec{k}
 \end{aligned}$$

2. กำหนด $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$ จงหา $\vec{u} \times \vec{v}$ และแสดงว่า $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\
 &= 3\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k} \\
 \vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}) \\
 &= (1)(3) + (3)(-3) + (-1)(-6) \\
 &= 3 - 9 + 6 \\
 &= 0 \\
 \vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) &= (2\vec{i} + \vec{k}) \cdot (3\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}) \\
 &= (2)(3) + (0)(-3) + (1)(-6) \\
 &= 6 + 0 - 6 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และตั้งฉากกับ $\vec{v}$

3. กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ จงหา

(1) $\vec{u} \times \vec{v}$

(2) $|\vec{u} \times \vec{v}|$

(3) ค่า sine ของมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$

วิธีทำ (1)

$$\begin{aligned}\vec{u} \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-2+9)\vec{i} - (-4+12)\vec{j} + (6-4)\vec{k} \\ &= 7\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad |\vec{u} \times \vec{v}| &= \sqrt{7^2 + (-8)^2 + 2^2} & |\vec{u}| &= \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} \\ &= \sqrt{49 + 64 + 4} & &= \sqrt{4 + 1 + 9} \\ &= \sqrt{117} & &= \sqrt{14} \\ &= 3\sqrt{13} & |\vec{v}| &= \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} \\ & & &= \sqrt{16 + 9 + 4} \\ & & &= \sqrt{29}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \sin \theta &= \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}| |\vec{v}|} \\ &= \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{14} \sqrt{29}} \\ &= \frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{406}}\end{aligned}$$

4. กำหนดจุดในระบบพิกัดฉากสามมิติ $P(1, -1, 4)$, $Q(2, 0, 1)$ และ $R(0, 2, 3)$ จงหา

(1) $\vec{PQ} \times \vec{PR}$

(2) พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม PQR

$$\begin{aligned}\text{วิธีทำ} \quad \vec{PQ} &= \begin{bmatrix} 2-1 \\ 0+1 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, |\vec{PQ}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{11} \\ \vec{PR} &= \begin{bmatrix} 0-1 \\ 2+1 \\ 3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, |\vec{PR}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (1) \quad \vec{PQ} \times \vec{PR} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\
 &= (-1+9)\vec{i} - (-1-3)\vec{j} + (3+1)\vec{k} \\
 &= 8\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม PQR เท่ากับ } \frac{1}{2}|\vec{PQ} \times \vec{PR}| &= \frac{1}{2}\sqrt{8^2+4^2+4^2} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{64+16+16} \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{96} \\
 &= 2\sqrt{6} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

5. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A(3, 2, -1), B(5, 3, 0) และ C(-2, 4, 1)

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ $\frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}|$

$$\vec{AB} = (5-3)\vec{i} + (3-2)\vec{j} + (0+1)\vec{k} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{AC} = (-2-3)\vec{i} + (4-2)\vec{j} + (1+1)\vec{k} = -5\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \times \vec{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} \\
 &= (2-2)\vec{i} - (4+5)\vec{j} + (4+5)\vec{k} \\
 &= -9\vec{j} + 9\vec{k}
 \end{aligned}$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \sqrt{(-9)^2 + 9^2} = 9\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับ } \frac{1}{2}|\vec{AB} \times \vec{AC}| &= \frac{1}{2}(9\sqrt{2}) \\
 &= \frac{9\sqrt{2}}{2} \text{ ตารางหน่วย}
 \end{aligned}$$

6. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$ และ $\overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (2-9)\vec{i} - (-2-6)\vec{j} + (3+2)\vec{k} \\ &= -7\vec{i} + 8\vec{j} + 5\vec{k} \\ |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| &= \sqrt{(-7)^2 + 8^2 + 5^2} \\ &= \sqrt{49 + 64 + 25} \\ &= \sqrt{138}\end{aligned}$$

พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $\sqrt{138}$ ตารางหน่วย

7. จงบอกผลลัพธ์และเหตุผลในแต่ละข้อต่อไปนี้

- (1) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})$ เนื่องจาก $\vec{v} \times \vec{r}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์
 $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})$ เป็นปริมาณสเกลาร์
- (2) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{r}$ เนื่องจาก $\vec{u} \times \vec{v}$ เป็น ปริมาณเวกเตอร์
 $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{r}$ เป็น ปริมาณเวกเตอร์
- (3) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{r}$ เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เป็น ปริมาณสเกลาร์
 $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{r}$ เป็น ปริมาณเวกเตอร์
- (4) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{r}$ เนื่องจาก $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เป็น ปริมาณสเกลาร์
 $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \times \vec{r}$ เป็น ไม่มีความหมาย

8. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีเวกเตอร์ต่อไปนี้เป็นด้าน $\vec{u} = -\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$ และ $\vec{r} = \vec{i} - \vec{k}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\vec{v} \times \vec{r} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (-1-0)\vec{i} - (0+1)\vec{j} + (0-1)\vec{k} \\ &= -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 |\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{r})| &= |(-\vec{i} - \vec{j})(-\vec{i} - \vec{j} - \vec{k})| \\
 &= |(-1)(-1) + (-1)(-1) + (0)(-1)| \\
 &= |1 + 1 + 0| \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานเท่ากับ **2 ลูกบาศก์หน่วย**

9. กำหนดให้ $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + a\vec{k}$ และ $\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ ถ้า $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน แล้ว a มีค่าเท่าไร

วิธีทำ โจทย์กำหนด $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ อยู่ในระนาบเดียวกัน

ดังนั้น เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ จะตั้งฉากกับ $\vec{w}$ ด้วย

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ คือ $\vec{u} \times \vec{v}$

ดังนั้น $\vec{u} \times \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$

นั่นคือ $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

จากกำหนด $\vec{u} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\vec{v} = 2\vec{i} + a\vec{k}$

$\vec{w} = -2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= (-2a - 0)\vec{i} - (3a - 2)\vec{j} + (0 + 4)\vec{k}$$

$$= -2a\vec{i} - (3a - 2)\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (-2a\vec{i} - (3a - 2)\vec{j} + 4\vec{k}) \cdot (-2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k})$$

$$0 = 4a - 3a + 2 - 12$$

$$0 = a - 10$$

$$a = 10$$



สรุป

เวกเตอร์และสมบัติของเวกเตอร์

- เวกเตอร์ คือ ปริมาณซึ่งมีทั้งขนาดและทิศทาง
- $\vec{u}$ ชนากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีทิศทางเดียวกันหรือทิศทางตรงกันข้าม เขียนแทนด้วย $\vec{u} // \vec{v}$
- $\vec{u}$ เท่ากับ $\vec{v}$ ก็ต่อเมื่อ เวกเตอร์ทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน เขียนแทนด้วย $\vec{u} = \vec{v}$
- นิเสธของ $\vec{u}$ คือ เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับขนาดของ $\vec{u}$ แต่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u}$ เขียนแทนด้วย $-\vec{u}$
- การบวกเวกเตอร์
กำหนดให้ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$
และ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$
 $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
หรืออาจหาผลบวกของ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ โดยใช้กฎของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน
- เวกเตอร์ศูนย์ หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับศูนย์ เขียนแทนด้วย $\vec{0}$
- การลบเวกเตอร์ กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$
- การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ เวกเตอร์ที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u}$ แต่มีขนาด a เท่าของ $\vec{u}$ คือ $a\vec{u}$ เรียก a ที่นำมากคูณกับ $\vec{u}$ ว่าสเกลาร์

ระบบพิกัดฉากสามมิติ

- แกน X แกน Y และแกน Z ตัดกันที่จุด O เรียกจุด O ว่าจุดกำเนิด โดยแกนทั้งสามจะกำหนดระนาบจำนวน 3 ระนาบ เรียกว่า ระนาบอ้างอิง ซึ่งระนาบดังกล่าวแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 บริเวณ เรียกแต่ละบริเวณว่า อัฐภาค
- ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ ในปริภูมิสามมิติ เท่ากับ $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ หน่วย

เวกเตอร์

เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก

- ถ้า $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2)$ แล้ว $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}$ และถ้า $x_2 - x_1 = a$ และ $y_2 - y_1 = b$ แล้วจะเขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ (ในทำนองเดียวกันเวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ในปริภูมิสามมิติ เขียนแทน $\overrightarrow{AB}$ ด้วย $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$)
- ขนาดของเวกเตอร์ ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ แล้ว $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ถ้า $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ แล้ว $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- เวกเตอร์หนึ่งหน่วย หมายถึง เวกเตอร์ที่มีขนาดเท่ากับ 1 หน่วย เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $\vec{u}$ คือ $\pm \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$
- โคไซน์แสดงทิศทาง ให้ $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$ เทียบกับแกน X, Y และ Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับ ดังนี้ $\frac{a_1}{|\vec{a}|}, \frac{a_2}{|\vec{a}|}, \frac{a_3}{|\vec{a}|}$
- ผลคูณเชิงสเกลาร์
 $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$
ถ้า $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ แล้ว $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$
- ผลคูณเชิงเวกเตอร์
 $\vec{u} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ และ $\vec{v} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$
 $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$
 $\vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$



แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์

ตรงกับแบบฝึกหัดท้ายบทของ สสวท. หน้า 287

จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงคำตอบเดียว

1. กำหนดให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่สอดคล้องกับสมการ $\vec{u} + 5\vec{v} - 2\vec{w} = \vec{0}$ โดยที่ $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ และ $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{w}$ แล้วค่าของ $|\vec{w}| \cos \theta$ เท่ากับข้อใด

1. 1 2. 1.5

~~X~~. 2.5 4. 5

2. กำหนดให้เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์

$$\begin{bmatrix} -8 \\ a \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -8 \\ a \end{bmatrix} \text{ ถ้า } \theta \text{ เป็น}$$

$$\text{มุมระหว่างเวกเตอร์ } \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \text{ และ } \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \text{ แล้ว}$$

$\cos^2 \theta$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{2}{3}$ 2. $\frac{3}{4}$

~~X~~. $\frac{4}{5}$ 4. 1

3. ให้ A, B, C เป็นจุดสามจุดที่ไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน และ D เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง BC ที่ทำให้ $BD:DC = 2:1$ ถ้า $|\vec{AB}|^2 = a|\vec{AB}|^2 + b|\vec{AC}|^2 + c|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริง และ $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \neq 0$ แล้ว $a^2 + b^2 + c^2$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. $\frac{31}{81}$ 2. $\frac{32}{81}$

3. $\frac{10}{27}$ ~~X~~. $\frac{11}{27}$

4. กำหนด $P(-1, 2)$, $R(3, 3)$, $O(0, 0)$ และ Q เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง PR โดยที่ $|\vec{PQ}| = \frac{1}{3}|\vec{PR}|$ ถ้า $A(x, y)$ เป็นจุดในจุดภาคที่ 2 ที่ทำให้ $\vec{OA}$ ตั้งฉากกับ $\vec{OQ}$ และ $|\vec{OA}| = 5$ หน่วย แล้ว $x+y$ เท่ากับข้อใด

1. $-\frac{6}{\sqrt{10}}$ ~~X~~. $-\frac{6}{\sqrt{2}}$

3. $\frac{6}{\sqrt{10}}$ 4. $\frac{6}{\sqrt{2}}$

5. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ และ E เป็นจุดที่ทำให้ $\vec{CE} = 2\vec{BA}$ ถ้า $\vec{BE} = a\vec{CE} + b\vec{CA}$ เมื่อ a, b เป็นค่าคงตัว แล้ว $b-a$ เท่ากับข้อใด

1. -1 2. -1.5

3. -2 ~~X~~. -2.5

6. ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส และ M, N เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC และด้าน CD ตามลำดับ ถ้า $\vec{u} = \vec{AM}$ และ $\vec{v} = \vec{AN}$ แล้ว $\vec{AB}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

2. $\frac{3}{2}\vec{u} - \vec{v}$

3. $\frac{2}{3}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$

~~X~~. $\frac{4}{3}\vec{u} - \frac{2}{3}\vec{v}$

7. กำหนดให้ A, B และ C คือจุดที่มีพิกัดเป็น $(-5, 0)$, $(3, 6)$ และ $(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ ตามลำดับ ถ้า D(a, b) เป็นจุดที่ทำให้ $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ แล้วค่าของ a+b เท่ากับข้อใด

X 14.2 2. 16.2

3. 18.4 4. 20.8

8. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\overrightarrow{OB} = 5\vec{i} - 2\vec{j}$ จากจุด A ลากส่วนของเส้นตรงไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด D แล้ว $\overrightarrow{OD}$ คือข้อใด

1. $\frac{7}{\sqrt{29}}(5\vec{i} - 2\vec{j})$ **X** $\frac{7}{29}(5\vec{i} - 2\vec{j})$

3. $\frac{8}{\sqrt{29}}(5\vec{i} - 2\vec{j})$ 4. $\frac{8}{29}(5\vec{i} - 2\vec{j})$

9. เวกเตอร์ใดต่อไปนี้ขนานกับเส้นตรงซึ่งสัมผัสกับวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$ ที่จุด (6, 0)

1. $3\vec{i} + 4\vec{j}$ **X** $3\vec{i} - 4\vec{j}$

3. $5\vec{i} - 3\vec{j}$ 4. $5\vec{i} + 3\vec{j}$

10. ถ้า $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ กับ $\vec{v}$ ถ้า $\vec{u} + \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u} - 2\vec{v}$ และ $\vec{u} + 2\vec{v}$ ตั้งฉากกับ $2\vec{u} - \vec{v}$ และ $|\vec{u}| = \sqrt{2}$ แล้ว $\cos \theta$ เท่ากับข้อใด

X $-\frac{1}{\sqrt{10}}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{6}}$

3. $-\frac{1}{2}$ 4. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

11. ให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ขนานกัน

ถ้า $\vec{w} = (a+5b)\vec{u} + (2a+3b+1)\vec{v}$

$\vec{s} = (-2a-b+2)\vec{u} + (2a-b-1)\vec{v}$

และ $3\vec{w} = 2\vec{s}$ แล้วค่าของ a+b เท่ากับข้อใด

X 2 2. 3

3. 4 4. 5

12. กำหนดให้ P(1, 3, 4) และ Q(3, -3, 1)

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{PQ}$ คือข้อใดต่อไปนี้

X $-\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$

2. $-\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} - \frac{3}{7}\vec{k}$

3. $\frac{2}{7}\vec{i} - \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$

4. $\frac{2}{7}\vec{i} + \frac{6}{7}\vec{j} + \frac{3}{7}\vec{k}$

13. กำหนดให้ $\vec{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ เวกเตอร์

สองหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\vec{u} - \vec{v}$ คือเวกเตอร์ในข้อใด

1. $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$ **X** $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \\ -5\sqrt{2} \end{bmatrix}$

3. $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} \\ 5 \end{bmatrix}$ 4. $\frac{1}{5\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{bmatrix}$

14. ถ้า $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$ แล้วค่าของ $(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{u} \times \vec{v})$ คือข้อใด

X $80\vec{i} + 55\vec{j} + 10\vec{k}$

2. $80\vec{i} - 55\vec{j} + 10\vec{k}$

3. $-80\vec{i} - 55\vec{j} - 10\vec{k}$

4. $-80\vec{i} + 55\vec{j} - 10\vec{k}$

15. กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้วค่าของ $\cos 2\theta$ เท่ากับข้อใด

X $-\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$



16. กำหนดให้ $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{k}$ และ $\vec{c} = 7\vec{j} - 4\vec{k}$ ค่าของ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ เท่ากับข้อใด

1. 23 2. 14
3. -14 **X** -23

17. ถ้ามุมระหว่างเวกเตอร์ $3\vec{i} - 2\vec{j}$ และ $\vec{i} - a\vec{j}$ มีขนาด 60° แล้ว a มีค่าเท่าไร

1. $\frac{24 \pm \sqrt{7}}{3}$ 2. $\frac{24 \pm \sqrt{7}}{6}$
X $\frac{-24 \pm \sqrt{507}}{3}$ 4. $\frac{24 \pm \sqrt{507}}{6}$

18. กำหนดให้ $\vec{u} = 2\vec{i} + (x-3)\vec{j} + 3\vec{k}$ และ $\vec{v} = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j} + \vec{k}$ โดย $\vec{u} = 3\vec{v}$ ค่าของ $x^2 + y^2$ เท่ากับข้อใด

X $\frac{178}{225}$ 2. $\frac{198}{225}$
3. $\frac{32}{45}$ 4. $\frac{9}{10}$

19. ถ้า $\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ และ $|\vec{u} + \vec{v}| = 8$ แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เท่ากับข้อใด

1. 6 2. 6.5
X 7 4. 7.5

20. ถ้า $|\vec{u} + \vec{v}| = 5\sqrt{2}$ และ $|\vec{u} - \vec{v}| = \sqrt{26}$ แล้วค่าของ $\vec{u} \cdot \vec{v}$ เท่ากับข้อใด

X 6 2. 7
3. 7.2 4. 7.5

21. กำหนดให้ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 5$ และ $|\vec{a} + \vec{c}| = \sqrt{10}$ แล้วค่าของ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$ เท่ากับข้อใด

1. -44 **X** -22
3. -1 4. 0

22. กำหนดให้ $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ โดยที่ $a > 0$ และ $b > 0$ และ $\vec{u} \cdot (5\vec{i} - 2\vec{j}) = 14$ ถ้า $\vec{u}$ ทำมุม θ กับ $\vec{i}$ และ $\cos \theta = \frac{3}{5}$ แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับข้อใด

1. 9 2. 12
X 14 4. 18

23. ถ้า $(1, 2, -1)$ เป็นจุดเริ่มของ $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$ แล้วจุดสิ้นสุดของ $\vec{u}$ คือจุดในข้อใด

1. $(1, -5, 7)$ **X** $(3, -1, 5)$
3. $(1, -1, 5)$ 4. $(3, -5, 7)$

24. เวกเตอร์ที่มีขนาด 10 หน่วย และมีทิศทางตรงกันข้ามกับ $\vec{u} = 24\vec{i} - 7\vec{j}$ คือเวกเตอร์ใด

1. $\frac{24}{5}\vec{i} - \frac{7}{5}\vec{j}$ 2. $-\frac{24}{5}\vec{i} + \frac{7}{5}\vec{j}$
3. $\frac{48}{5}\vec{i} - \frac{14}{5}\vec{j}$ **X** $-\frac{48}{5}\vec{i} + \frac{14}{5}\vec{j}$

25. กำหนด $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - a\vec{k}$ ถ้า $\vec{u}$ ตั้งฉากกับ $\vec{v}$ แล้วค่าของ a เท่ากับเท่าไร

1. 1 **X** 2
3. 3 4. 4

26. กำหนดรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ABC และ D เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่งทำให้ $|\vec{BD}| : |\vec{BC}| = 1 : 3$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $2\vec{AB} + \vec{BC} = 3\vec{AD}$
(2) $6\vec{AD} \cdot \vec{BC} + |\vec{BC}|^2 = 0$

ข้อใดสรุปได้ถูกต้อง

1. (1) ถูก และ (2) ถูก
2. (1) ถูก และ (2) ผิด
X (1) ผิด และ (2) ถูก
4. (1) ผิด และ (2) ผิด



27. ถ้า $a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $-2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ แล้วค่าของ $a+b+c$ เท่ากับข้อใด

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{5}$
3. $\frac{2}{3}$ **X** 1

28. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = \mathbf{i}-\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ และ $\overrightarrow{AD} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย

- X** 15 ตารางหน่วย
2. 18 ตารางหน่วย
3. 20 ตารางหน่วย
4. 22 ตารางหน่วย

29. กำหนดให้ $A(1, -1, 4)$, $B(2, 0, 1)$, $C(0, 2, 3)$ และ $D(3, 5, 7)$ เป็นจุดยอดมุมของกล่องทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน ปริมาตรของกล่องใบนี้เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

1. 48 ลูกบาศก์หน่วย
X 52 ลูกบาศก์หน่วย
3. 55 ลูกบาศก์หน่วย
4. 58 ลูกบาศก์หน่วย

30. กำหนดให้ $\mathbf{u} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+5\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = \mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ และ $\mathbf{w} = -2\mathbf{i}+4\mathbf{j}-6\mathbf{k}$ ค่าของ $\mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ เท่ากับข้อใด

- X** 0 2. 1
3. 4 4. 8





บรรณานุกรม

ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. (2555). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 1**. กรุงเทพฯ :
 ห้างหุ้นส่วนจำกัด ที.เอส.บี โปรดักส์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2562). **หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์
 เล่ม 1 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560)**. (พิมพ์ครั้งที่ 1). กรุงเทพฯ :
 สำนักพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Chin Hoon Wen. (1987). **Additional Mathematics (pure)**. Singapore: Longman Singapore Publishers
 (Pte) Limited.

Dennis G. Zill. (1990). **Trigonometry, Second Edition**. USA: McGraw-Hill, Inc.

Elliott Mendelson. (1988). **Calculus**. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

Howard A. Silver, (1986). **Algebra and Trigonometry**. USA: Prentice-Hall Inc.

Leo C.F. Leung. (1991). **Vectors & Complex Numbers**. Hong Kong: Yih Mei Book Co.Ltd.

ภาคผนวก

ตารางค่าฟังก์ชันตรีโกณมิติ

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
0°	00'	.0000	.0000	.0000		1.0000	1.5708	90° 00'
	10'	.0029	.0029	.0029	343.77	1.0000	1.5679	50'
	20'	.0058	.0058	.0058	171.89	1.0000	1.5650	40'
	30'	.0087	.0087	.0087	114.59	1.0000	1.5621	30'
	40'	.0116	.0116	.0116	85.940	.9999	1.5592	20'
1°	50'	.0145	.0145	.0145	68.750	.9999	1.5563	10'
	00'	.0175	.0175	.0175	57.290	.9998	1.5533	89° 00'
	10'	.0204	.0204	.0204	49.104	.9998	1.5504	50'
	20'	.0233	.0233	.0233	42.964	.9997	1.5475	40'
	30'	.0262	.0262	.0262	38.188	.9997	1.5446	30'
2°	40'	.0291	.0291	.0291	34.368	.9996	1.5417	20'
	50'	.0320	.0320	.0320	31.242	.9995	1.5388	10'
	00'	.0349	.0349	.0349	28.636	.9994	1.5359	88° 00'
	10'	.0378	.0378	.0378	26.432	.9993	1.5330	50'
	20'	.0407	.0407	.0407	24.542	.9992	1.5301	40'
3°	30'	.0436	.0436	.0437	22.904	.9990	1.5272	30'
	40'	.0465	.0465	.0466	21.470	.9989	1.5243	20'
	50'	.0495	.0494	.0495	20.206	.9988	1.5213	10'
	00'	.0524	.0523	.0524	19.081	.9986	1.5184	87° 00'
	10'	.0553	.0552	.0553	18.075	.9985	1.5155	50'
4°	20'	.0582	.0581	.0582	17.169	.9983	1.5126	40'
	30'	.0611	.0610	.0612	16.350	.9981	1.5097	30'
	40'	.0640	.0640	.0641	15.605	.9980	1.5068	20'
	50'	.0669	.0669	.0670	14.924	.9978	1.5039	10'
	00'	.0698	.0698	.0699	14.301	.9976	1.5010	86° 00'
5°	10'	.0727	.0727	.0729	13.727	.9974	1.4981	50'
	20'	.0756	.0756	.0758	13.197	.9971	1.4952	40'
	30'	.0785	.0785	.0787	12.706	.9969	1.4923	30'
	40'	.0814	.0814	.0816	12.251	.9967	1.4893	20'
	50'	.0844	.0843	.0846	11.826	.9964	1.4864	10'
6°	00'	.0873	.0872	.0875	11.430	.9962	1.4835	85° 00'
	10'	.0902	.0901	.0904	11.059	.9959	1.4806	50'
	20'	.0931	.0929	.0934	10.712	.9957	1.4777	40'
	30'	.0960	.0958	.0963	10.385	.9954	1.4748	30'
	40'	.0989	.0987	.0992	10.078	.9951	1.4719	20'
7°	50'	.1018	.1016	.1022	9.7882	.9948	1.4690	10'
	00'	.1047	.1045	.1051	9.5144	.9945	1.4661	84° 00'
	10'	.1076	.1074	.1080	9.2553	.9942	1.4632	50'
	20'	.1105	.1103	.1110	9.0098	.9939	1.4603	40'
	30'	.1134	.1132	.1139	8.7769	.9936	1.4573	30'
8°	40'	.1164	.1161	.1169	8.5555	.9932	1.4544	20'
	50'	.1193	.1190	.1198	8.3450	.9929	1.4515	10'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees



Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
7°	00'	.1222	.1219	.1228	8.1443	.9925	1.4486	83° 00'
	10'	.1251	.1248	.1257	7.9530	.9922	1.4457	50'
	20'	.1280	.1276	.1287	7.7704	.9917	1.4428	40'
	30'	.1309	.1305	.1317	7.5958	.9914	1.4399	30'
	40'	.1338	.1334	.1346	7.4287	.9911	1.4370	20'
	50'	.1367	.1363	.1376	7.2687	.9907	1.4341	10'
8°	00'	.1396	.1392	.1405	7.1154	.9903	1.4312	82° 00'
	10'	.1425	.1421	.1435	6.9682	.9899	1.4283	50'
	20'	.1454	.1449	.1465	6.8269	.9894	1.4254	40'
	30'	.1484	.1478	.1495	6.6912	.9890	1.4224	30'
	40'	.1513	.1507	.1524	6.5606	.9886	1.4195	20'
	50'	.1542	.1536	.1554	6.4348	.9881	1.4166	10'
9°	00'	.1571	.1564	.1584	6.3138	.9877	1.4137	81° 00'
	10'	.1600	.1593	.1614	6.1970	.9872	1.4108	50'
	20'	.1629	.1622	.1644	6.0844	.9868	1.4079	40'
	30'	.1658	.1650	.1673	5.9758	.9863	1.4050	30'
	40'	.1687	.1679	.1703	5.8708	.9858	1.4021	20'
	50'	.1716	.1708	.1733	5.7694	.9853	1.3992	10'
10°	00'	.1745	.1736	.1763	5.6713	.9848	1.3963	80° 00'
	10'	.1774	.1765	.1793	5.5764	.9843	1.3934	50'
	20'	.1804	.1794	.1823	5.4845	.9838	1.3904	40'
	30'	.1833	.1822	.1853	5.3955	.9833	1.3875	30'
	40'	.1862	.1851	.1883	5.3093	.9827	1.3846	20'
	50'	.1891	.1880	.1914	5.2257	.9822	1.3817	10'
11°	00'	.1920	.1908	.1944	5.1446	.9816	1.3788	79° 00'
	10'	.1949	.1937	.1974	5.0658	.9811	1.3759	50'
	20'	.1978	.1965	.2004	4.9894	.9805	1.3730	40'
	30'	.2007	.1994	.2035	4.9152	.9799	1.3701	30'
	40'	.2036	.2022	.2065	4.8430	.9793	1.3672	20'
	50'	.2065	.2051	.2095	4.7729	.9787	1.3643	10'
12°	00'	.2094	.2079	.2126	4.7046	.9781	1.3614	78° 00'
	10'	.2123	.2108	.2156	4.6382	.9775	1.3584	50'
	20'	.2153	.2136	.2186	4.5736	.9769	1.3555	40'
	30'	.2182	.2164	.2217	4.5107	.9763	1.3526	30'
	40'	.2211	.2193	.2247	4.4494	.9757	1.3497	20'
	50'	.2240	.2221	.2278	4.3897	.9750	1.3468	10'
13°	00'	.2269	.2250	.2309	4.3315	.9744	1.3439	77° 00'
	10'	.2298	.2278	.2339	4.2747	.9737	1.3410	50'
	20'	.2327	.2306	.2370	4.2193	.9730	1.3381	40'
	30'	.2356	.2334	.2401	4.1653	.9724	1.3352	30'
	40'	.2385	.2363	.2432	4.1126	.9717	1.3323	20'
	50'	.2414	.2391	.2462	4.0611	.9710	1.3294	10'
14°	00'	.2443	.2419	.2493	4.0108	.9703	1.3265	76° 00'
	10'	.2473	.2447	.2524	3.9617	.9696	1.3235	50'
	20'	.2502	.2476	.2555	3.9136	.9689	1.3206	40'
	30'	.2531	.2504	.2586	3.8667	.9681	1.3177	30'
	40'	.2560	.2532	.2617	3.8208	.9674	1.3148	20'
	50'	.2589	.2560	.2648	3.7760	.9667	1.3119	10'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
15°	00'	.2618	.2588	.2679	3.7321	.9659	1.3090	75° 00'
	10'	.2647	.2616	.2711	3.6891	.9652	1.3061	50'
	20'	.2676	.2644	.2742	3.6470	.9644	1.3032	40'
	30'	.2705	.2672	.2773	3.6059	.9636	1.3003	30'
	40'	.2734	.2700	.2805	3.5656	.9628	1.2974	20'
16°	50'	.2763	.2728	.2836	3.5261	.9621	1.2945	10'
	00'	.2793	.2756	.2867	3.4874	.9613	1.2915	74° 00'
	10'	.2822	.2784	.2899	3.4495	.9605	1.2886	50'
	20'	.2851	.2812	.2931	3.4124	.9596	1.2857	40'
	30'	.2880	.2840	.2962	3.3759	.9588	1.2828	30'
17°	40'	.2909	.2868	.2994	3.3402	.9580	1.2799	20'
	50'	.2938	.2896	.3026	3.3052	.9572	1.2770	10'
	00'	.2967	.2924	.3057	3.2709	.9563	1.2741	73° 00'
	10'	.2996	.2952	.3089	3.2371	.9555	1.2712	50'
	20'	.3025	.2979	.3121	3.2041	.9546	1.2683	40'
18°	30'	.3054	.3007	.3153	3.1716	.9537	1.2654	30'
	40'	.3083	.3035	.3185	3.1397	.9528	1.2625	20'
	50'	.3113	.3062	.3217	3.1084	.9520	1.2595	10'
	00'	.3142	.3090	.3249	3.0777	.9511	1.2566	72° 00'
	10'	.3171	.3118	.3281	3.0475	.9502	1.2537	50'
19°	20'	.3200	.3145	.3314	3.0178	.9492	1.2508	40'
	30'	.3229	.3173	.3346	2.9887	.9483	1.2479	30'
	40'	.3258	.3201	.3378	2.9600	.9474	1.2450	20'
	50'	.3287	.3228	.3411	2.9319	.9465	1.2421	10'
	00'	.3316	.3256	.3443	2.9042	.9455	1.2392	71° 00'
20°	10'	.3345	.3283	.3476	2.8770	.9446	1.2363	50'
	20'	.3374	.3311	.3508	2.8502	.9436	1.2334	40'
	30'	.3403	.3338	.3541	2.8239	.9426	1.2305	30'
	40'	.3432	.3365	.3574	2.7980	.9417	1.2275	20'
	50'	.3462	.3393	.3607	2.7725	.9407	1.2246	10'
21°	00'	.3491	.3420	.3640	2.7475	.9397	1.2217	70° 00'
	10'	.3520	.3448	.3673	2.7228	.9387	1.2188	50'
	20'	.3549	.3475	.3706	2.6985	.9377	1.2159	40'
	30'	.3578	.3502	.3739	2.6746	.9367	1.2130	30'
	40'	.3607	.3529	.3772	2.6511	.9356	1.2101	20'
22°	50'	.3636	.3557	.3805	2.6279	.9346	1.2072	10'
	00'	.3665	.3584	.3839	2.6051	.9336	1.2043	69° 00'
	10'	.3694	.3611	.3872	2.5826	.9325	1.2014	50'
	20'	.3723	.3638	.3906	2.5605	.9315	1.1985	40'
	30'	.3752	.3665	.3939	2.5386	.9304	1.1956	30'
	40'	.3782	.3692	.3973	2.5172	.9293	1.1926	20'
	50'	.3811	.3719	.4006	2.4960	.9283	1.1897	10'
	00'	.3840	.3746	.4040	2.4751	.9272	1.1868	68° 00'
	10'	.3869	.3773	.4074	2.4545	.9261	1.1839	50'
	20'	.3898	.3800	.4108	2.4342	.9250	1.1810	40'
	30'	.3927	.3827	.4142	2.4142	.9239	1.1781	30'
	40'	.3956	.3854	.4176	2.3945	.9228	1.1752	20'
	50'	.3985	.3881	.4210	2.3750	.9216	1.1723	10'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees



Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
23°	00'	.4014	.3907	.4245	2.3559	.9205	1.1694	67° 00'
	10'	.4043	.3934	.4279	2.3369	.9194	1.1665	50'
	20'	.4072	.3961	.4314	2.3183	.9182	1.1636	40'
	30'	.4102	.3987	.4348	2.2998	.9171	1.1606	30'
	40'	.4131	.4014	.4383	2.2817	.9159	1.1577	20'
	50'	.4160	.4041	.4417	2.2637	.9147	1.1548	10'
24°	00'	.4189	.4067	.4452	2.2460	.9135	1.1519	66° 00'
	10'	.4218	.4094	.4487	2.2286	.9124	1.1490	50'
	20'	.4247	.4120	.4522	2.2113	.9112	1.1461	40'
	30'	.4276	.4147	.4557	2.1943	.9100	1.1432	30'
	40'	.4305	.4173	.4592	2.1775	.9088	1.1403	20'
	50'	.4334	.4200	.4628	2.1609	.9075	1.1374	10'
25°	00'	.4363	.4226	.4663	2.1445	.9063	1.1345	65° 00'
	10'	.4392	.4253	.4699	2.1283	.9051	1.1316	50'
	20'	.4422	.4279	.4734	2.1123	.9038	1.1286	40'
	30'	.4451	.4305	.4770	2.0965	.9026	1.1257	30'
	40'	.4480	.4331	.4806	2.0809	.9013	1.1228	20'
	50'	.4509	.4358	.4841	2.0655	.9001	1.1199	10'
26°	00'	.4538	.4384	.4877	2.0503	.8988	1.1170	64° 00'
	10'	.4567	.4410	.4913	2.0353	.8975	1.1141	50'
	20'	.4596	.4436	.4950	2.0204	.8962	1.1112	40'
	30'	.4625	.4462	.4986	2.0057	.8949	1.1083	30'
	40'	.4654	.4488	.5022	1.9912	.8936	1.1054	20'
	50'	.4683	.4514	.5059	1.9768	.8923	1.1025	10'
27°	00'	.4712	.4540	.5095	1.9626	.8910	1.0996	63° 00'
	10'	.4741	.4566	.5132	1.9486	.8897	1.0966	50'
	20'	.4771	.4592	.5169	1.9347	.8884	1.0937	40'
	30'	.4800	.4617	.5206	1.9210	.8870	1.0908	30'
	40'	.4829	.4643	.5243	1.9074	.8857	1.0879	20'
	50'	.4858	.4669	.5280	1.8940	.8843	1.0850	10'
28°	00'	.4887	.4695	.5317	1.8807	.8829	1.0821	62° 00'
	10'	.4916	.4720	.5354	1.8676	.8816	1.0792	50'
	20'	.4945	.4746	.5392	1.8546	.8802	1.0763	40'
	30'	.4974	.4772	.5430	1.8418	.8788	1.0734	30'
	40'	.5003	.4797	.5467	1.8291	.8774	1.0705	20'
	50'	.5032	.4823	.5505	1.8165	.8760	1.0676	10'
29°	00'	.5061	.4848	.5543	1.8040	.8746	1.0647	61° 00'
	10'	.5091	.4874	.5581	1.7917	.8732	1.0617	50'
	20'	.5120	.4899	.5619	1.7796	.8718	1.0588	40'
	30'	.5149	.4924	.5658	1.7675	.8704	1.0559	30'
	40'	.5178	.4950	.5696	1.7556	.8689	1.0530	20'
	50'	.5207	.4975	.5735	1.7437	.8675	1.0501	10'
30°	00'	.5236	.5000	.5774	1.7321	.8660	1.0472	60° 00'
	10'	.5265	.5025	.5812	1.7205	.8646	1.0443	50'
	20'	.5294	.5050	.5851	1.7090	.8631	1.0414	40'
	30'	.5323	.5075	.5890	1.6977	.8616	1.0385	30'
	40'	.5352	.5100	.5930	1.6864	.8601	1.0356	20'
	50'	.5381	.5125	.5969	1.6753	.8587	1.0327	10'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees

Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
31°	00'	.5411	.5150	.6009	1.6643	.8572	1.0297	59° 00'
	10'	.5440	.5175	.6048	1.6534	.8557	1.0268	50'
	20'	.5469	.5200	.6088	1.6426	.8542	1.0239	40'
	30'	.5498	.5225	.6128	1.6319	.8526	1.0210	30'
	40'	.5527	.5250	.6168	1.6212	.8511	1.0181	20'
	50'	.5556	.5275	.6208	1.6107	.8496	1.0152	10'
32°	00'	.5585	.5299	.6249	1.6003	.8480	1.0123	58° 00'
	10'	.5614	.5324	.6289	1.5900	.8465	1.0094	50'
	20'	.5643	.5348	.6330	1.5798	.8450	1.0061	40'
	30'	.5672	.5373	.6371	1.5697	.8434	1.0036	30'
	40'	.5701	.5398	.6412	1.5597	.8418	1.0007	20'
	50'	.5730	.5422	.6453	1.5497	.8403	.9977	10'
33°	00'	.5760	.5446	.6494	1.5399	.8387	.9948	57° 00'
	10'	.5789	.5471	.6536	1.5301	.8371	.9919	50'
	20'	.5818	.5495	.6577	1.5204	.8355	.9890	40'
	30'	.5847	.5519	.6619	1.5108	.8339	.9861	30'
	40'	.5876	.5544	.6661	1.5013	.8323	.9832	20'
	50'	.5905	.5568	.6703	1.4919	.8307	.9803	10'
34°	00'	.5934	.5592	.6745	1.4826	.8290	.9774	56° 00'
	10'	.5963	.5616	.6787	1.4733	.8274	.9745	50'
	20'	.5992	.5640	.6830	1.4641	.8258	.9716	40'
	30'	.6021	.5664	.6873	1.4550	.8241	.9687	30'
	40'	.6050	.5688	.6916	1.4460	.8225	.9657	20'
	50'	.6080	.5712	.6959	1.4370	.8208	.9628	10'
35°	00'	.6109	.5736	.7002	1.4281	.8192	.9599	55° 00'
	10'	.6138	.5760	.7046	1.4193	.8175	.9570	50'
	20'	.6167	.5783	.7089	1.4106	.8158	.9541	40'
	30'	.6196	.5807	.7133	1.4019	.8141	.9512	30'
	40'	.6225	.5831	.7177	1.3934	.8124	.9483	20'
	50'	.6254	.5854	.7221	1.3848	.8107	.9454	10'
36°	00'	.6283	.5878	.7265	1.3764	.8090	.9425	54° 00'
	10'	.6312	.5901	.7310	1.3680	.8073	.9396	50'
	20'	.6341	.5925	.7355	1.3597	.8056	.9367	40'
	30'	.6370	.5948	.7400	1.3514	.8039	.9338	30'
	40'	.6400	.5972	.7445	1.3432	.8021	.9308	20'
	50'	.6429	.5995	.7490	1.3351	.8004	.9279	10'
37°	00'	.6458	.6018	.7536	1.3270	.7986	.9250	53° 00'
	10'	.6487	.6041	.7581	1.3190	.7969	.9221	50'
	20'	.6516	.6065	.7627	1.3111	.7951	.9192	40'
	30'	.6545	.6088	.7673	1.3032	.7934	.9163	30'
	40'	.6574	.6111	.7720	1.2954	.7916	.9134	20'
	50'	.6603	.6134	.7766	1.2876	.7898	.9105	10'
38°	00'	.6632	.6157	.7813	1.2799	.7880	.9076	52° 00'
	10'	.6661	.6180	.7860	1.2723	.7862	.9047	50'
	20'	.6690	.6202	.7907	1.2647	.7844	.9018	40'
	30'	.6720	.6225	.7954	1.2572	.7826	.8988	30'
	40'	.6749	.6248	.8002	1.2497	.7808	.8959	20'
	50'	.6778	.6271	.8050	1.2423	.7790	.8930	10'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees



Degrees		Radians	Sine	Tangent	Cotangent	Cosine		
39°	00'	.6807	.6293	.8098	1.2349	.7771	.8901	51° 00'
	10'	.6836	.6316	.8146	1.2276	.7753	.8872	50'
	20'	.6865	.6338	.8195	1.2203	.7735	.8843	40'
	30'	.6894	.6361	.8243	1.2131	.7716	.8814	30'
	40'	.6923	.6383	.8292	1.2059	.7698	.8785	20'
	50'	.6952	.6406	.8342	1.1988	.7679	.8756	10'
40°	00'	.6981	.6428	.8391	1.1918	.7660	.8727	50° 00'
	10'	.7010	.6450	.8441	1.1847	.7642	.8698	50'
	20'	.7039	.6472	.8491	1.1778	.7623	.8668	40'
	30'	.7069	.6494	.8541	1.1708	.7604	.8639	30'
	40'	.7098	.6517	.8591	1.1640	.7585	.8610	20'
	50'	.7127	.6539	.8642	1.1571	.7566	.8581	10'
41°	00'	.7156	.6561	.8693	1.1504	.7547	.8552	49° 00'
	10'	.7185	.6583	.8744	1.1436	.7528	.8523	50'
	20'	.7214	.6604	.8796	1.1369	.7509	.8494	40'
	30'	.7243	.6626	.8847	1.1303	.7490	.8465	30'
	40'	.7272	.6648	.8899	1.1237	.7470	.8436	20'
	50'	.7301	.6670	.8952	1.1171	.7451	.8407	10'
42°	00'	.7330	.6691	.9004	1.1106	.7431	.8378	48° 00'
	10'	.7359	.6713	.9057	1.1041	.7412	.8348	50'
	20'	.7389	.6734	.9110	1.0977	.7392	.8319	40'
	30'	.7418	.6756	.9163	1.0913	.7373	.8290	30'
	40'	.7447	.6777	.9217	1.0850	.7353	.8261	20'
	50'	.7476	.6799	.9271	1.0786	.7333	.8232	10'
43°	00'	.7505	.6820	.9325	1.0724	.7314	.8203	47° 00'
	10'	.7534	.6841	.9380	1.0661	.7294	.8174	50'
	20'	.7563	.6862	.9435	1.0599	.7274	.8145	40'
	30'	.7592	.6884	.9490	1.0538	.7254	.8116	30'
	40'	.7621	.6905	.9545	1.0477	.7234	.8087	20'
	50'	.7650	.6926	.9601	1.0416	.7214	.8058	10'
44°	00'	.7679	.6947	.9657	1.0355	.7193	.8029	46° 00'
	10'	.7709	.6967	.9713	1.0295	.7173	.7999	50'
	20'	.7738	.6988	.9770	1.0235	.7153	.7970	40'
	30'	.7767	.7009	.9827	1.0176	.7133	.7941	30'
	40'	.7796	.7030	.9884	1.0117	.7112	.7912	20'
	50'	.7825	.7050	.9942	1.0058	.7092	.7883	10'
45°	00'	.7854	.7071	1.0000	1.0000	.7071	.7854	45° 00'
			Cosine	Cotangent	Tangent	Sine	Radians	Degrees

